



TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

JUHO WALDÉN
RULLAUKSEN TEOREETTINEN MALLINTAMINEN JA
VAIKUTUKSET RULLIIN

Diplomityö

Tarkastaja: professori Erno Keskinen

Tarkastaja ja aihe hyväksytty
Teknisten tieteiden
tiedekuntaneuvoston
kokouksessa 5. marraskuuta 2014

TIIVISTELMÄ

TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

Konetekniikan koulutusohjelma

WALDÉN, JUHO: Rullauksen teoreettinen mallintaminen ja vaikutukset rulliin

Diplomityö, 61 sivua ja 7 liitesivua

Joulukuu, 2014

Pääaine: Konejärjestelmien suunnittelu

Tarkastaja: Erno Keskinen

Ohjaaja: Kai Hellsten / MetsäBoard Oyj

Avainsanat: Rullaus, taivekartonki, pituusleikkaus

Taivekartonki on pakkauskartonkia, jonka käyttökohteet asettavat sille erilaisia vaatimuksia. Sen on oltava pinnaltaan painokelpoista ja materiaaliominaisuuksiltaan vahvaa. Pituusleikkaus on tehtaan viimeisimpiä tuotantoprosesseja. Siinä valmis konerulla leikataan pienemmiksi asiakasrulliksi.

Rullauksen vaikutuksia valmiiseen tuotteeseen ei tunneta teollisuudessa riittävän hyvin ja rullaustapahtuman hallinta on hankalaa. Teoreettisesti tarkasteltuna rullaustapahtuma on hyvin monimutkainen. Rullausmallit antavat valmiuksia ymmärtää sekä rullauksessa tapahtuvia fysikaalisia ilmiöitä että erilaisten ajopaparametrien vaikutusta lopputulokseen.

Rullausmalleissa rullan muodostuminen esitetään matemaattisten yhtälöryhmien avulla. Syntyvään rullaan vaikuttaa erilaisia voimia, jotka muuttuvat ja ovat riippuvaisia toisistaan. Rullausmallien vaatimat alkuarvot ovat materiaalista ja laitekonstruktioista riippuvaisia. Materiaalivakioiden määrittely on haastavaa, sillä ne eivät pysy vakioina eri kerrosten välillä.

Rullaustapahtumaa hallitaan yleisesti ottaen kolmella parametrilla, joita ovat rataakireys, nippikuorma ja rullausmomentti. Erilaiset laitekonstruktiot ja rullausprosessit antavat valmiudet näiden perusparametrien käytölle syntyvän rullan sisäisten jännitysjakaumien hallinnassa.

Valmiita rullia tutkittaessa huomataan hyvin rullan sisäisen jännitysjakauksen ja rullaan vaikuttavan nippivoiman aiheuttamat muutokset.

ABSTRACT

TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

Master's Degree Programme in Mechanical Engineering

WALDÉN, JUHO: Theoretical modelling of winding and influences to wound rolls

Master of Science Thesis, 61 pages and 7 Appendix pages

December, 2014

Major: Design of Machine Systems

Examiner: Erno Keskinen

Advisor: Kai Hellsten / MetsäBoard Oyj

Keywords: Winding, folding boxboard, rollers

Folding boxboard is paper grade that is used as packing material. Several end user applications require multiple different material qualities with excellent printing surface. Winding is one of the last production processes performed in paper mill.

The influences to wound rolls are a topic that is not commonly known in paper mills and the control of winding process is very difficult. Theoretical models of winding are very complex. Winding models give abilities to understand physical phenomenon as well as the influences of different driving parameters to wound rolls.

Winding models use system of mathematical equations to represent the winding process. The wound roll is affected by different forces that are constantly changing and related to each other. Defining of inputs required by winding models is challenging because properties of materials differ from layer to layer.

The winding is usually controlled with three parameters that are web tension, nip load and winding torque. Different design constructions and winding processes give several different abilities to use these previously mentioned control parameters to design the perfectly wound roll.

The influence of nip load is seen after examination of wound rolls.

ALKUSANAT

Tämä diplomityö on saanut alkunsa ollessani töissä MetsäBoard Oyj:n eri tehtailla. Taivekartongin pitusleikkauksessa siihen kohdistuu paljon voimia ja heräsi tarve selvittää näiden voimien vaikutusta lopputuotteeseen.

Haluan kiittää silloista työnantajaani ohjauksesta ja diplomityön mahdollistamisesta.

Työni loppuunsaattaminen vaati suuria ponnisteluja ja ajankäytön hallintaa. Haluan osoittaa kiitokset työn tarkastajalle neuvoista ja avusta.

Lämmin kiitos perheelleni kannustuksesta opiskelujeni eri vaiheissa.

SISÄLLYS

1.	Johdanto	1
2.	Taivekartonki ja sen valmistaminen	2
2.1.	Taivekartongin valmistusprosessi	2
2.2.	Taivekartongin ominaisuudet ja niiden mittaaminen	4
2.2.1.	Kiilto	4
2.2.2.	Paksuus ja bulkki	4
2.2.3.	Jäykkyys.....	5
3.	Pituusleikkaus	6
3.1.	Pituusleikkauksen osaprosessit	7
3.1.1.	Aukirullaus.....	7
3.1.2.	Leikkaus.....	7
3.1.3.	Kiinnirullaus	7
3.1.4.	Rainojen levitys ja osarainojen erotus	8
3.2.	Pituusleikkurin automaatio	9
3.2.1.	Automatisoidut toiminnot	10
3.3.	Ajoparametrit kantotelaleikkurissa	10
3.4.	Modifioidut kantotelaleikkurit	11
3.4.1.	Pehmeillä materiaaleilla pinnoitetut kantotelat.....	11
3.4.2.	Ilmakevennys	11
3.4.3.	Hihnatuenta.....	11
3.4.4.	Muuttuva geometria.....	12
4.	Rullauksen teoreettinen mallinnus	13
4.1.	Rullauksen mallintaminen.....	14
4.1.1.	Materiaalivakiot	14
4.1.2.	Ensimmäinen reunaehto – hylsyn jäykkyys.....	15
4.1.3.	Toinen reunaehto - rullauskireys	20
4.2.	Hakielin rullausmalli.....	21
5.	Kantotelaleikkurin staattinen mallintaminen	27
5.1.	Rullan täyttyminen	27
5.2.	Viivakuormituksen ohjaus	28
5.3.	Rullan jännitystila	28
6.	Materiaaliominaisuuksien muuttuminen rullauksessa	32
6.1.	Ongelmien muodostumismekanismit.....	32
6.2.	Epätasainen liukuminen ja pinnan muuttuminen	32
6.3.	Paksuuden ja bulkin muutos sekä niiden aikariippuvuus.....	34
7.	Materiaaliominaisuuksien empiirinen tutkiminen	35
7.1.	Mitattavat materiaaliominaisuudet ja mittausten suoritustapa.....	35
7.2.	Mittaus 1 – eri ratapaikat, sama muutto	36
7.2.1.	Paksuus	37
7.2.2.	PPS.....	38

7.2.3.	Kiilto	39
7.2.4.	Taber15° KS	40
7.2.5.	Taber15° PS	41
7.2.6.	OptiTopo	42
7.3.	Mittaus 2 – eri muutot, sama ratapaikka	43
7.3.1.	Paksuus	44
7.3.2.	PPS	45
7.3.3.	Kiilto	46
7.3.4.	Taber15° KS	47
7.3.5.	Taber15° PS	48
7.3.6.	OptiTopo	49
7.4.	Mittaus 3 – WinBelt-tyyppinen leikkuri	50
7.4.1.	Paksuus	50
7.4.2.	PPS Flex	51
7.4.3.	Kiilto	52
7.5.	Johtopäätökset empiirisen tutkimuksen jälkeen	52
8.	Johtopäätökset	53
	Lähteet	54

TERMIT JA NIIDEN MÄÄRITELMÄT

E_T	Tangentiaalissuuntainen kimmokerroin
E_R	Radiaalissuuntainen kimmokerroin
μ_{RT}	Poissonin vakio (radiaalissuuntaiselle venymälle)
μ_{TR}	Poissonin vakio (tangentiaalissuuntaiselle venymälle)
T	Ratakireys
N	Nippivoima
ΔT	Momenttiero kantotelan ja rullan välillä
T_D	Kantotelan rullausmomentti
T_R	Rullan pyörimismomentti
WIT	Sisäänrullausjännitys (<i>Wound-In-Tension</i>)
σ_R	Radiaalissuuntainen kuormitus
K_i	Käyräsovitusvakioita
E_c	Rullausmalleissa käytettävä hylsyn jäykkyys
w	Radiaalinen muodonmuutos
r_0	Hylsyn ulompi säde eli rullan sisäsäde
P_0	Radiaalissuuntainen paine hylsyn pinnan ja rullan välillä
ε_T	Tangentiaalissuuntainen jännitys
σ_T	Tangentiaalissuuntainen kuormitus
μ_C	Hylsymateriaalin Poissonin vakio
E_{cm}	Hylsymateriaalin kimmokerroin
a	Sisäsäde
b	Ulkosäde
P_i	Sisäinen paine
P_o	Ulkoinen paine
r_c	Hylsyn sisäsäde
d_c	Hylsyn sisähalkaisija
t_c	Hylsyn seinämän paksuus
E_{cR}	Hylsymateriaalin radiaalissuuntainen kimmokerroin
E_{cT}	Hylsymateriaalin tangentiaalissuuntainen kimmokerroin
s	Suhdeluku r_0 / r_c
μ_{cR}	Hylsymateriaalin radiaalissuuntainen Poissonin vakio
WIS	Sisäänrullauskuormitus (<i>Wound-In-Stress</i>)
h	Rullattavan rainan paksuus
r_n	Rullan hetkellinen säde

$A...D$	Vakiokertoimia käyräsovitukselle
r	Rullan paikallissäde
ρ	Rullan paikallistiheys
ω	Rullan hetkellinen kulmanopeus
ϕ	Rullan kannattelukulma

JOHDANTO

Taivekartonkia käytetään useissa erilaisissa kuluttajapakkauksissa. Taivekartongin käyttö sekä sen laatukriteerit kasvavat jatkuvasti. Laatuun panostetaan useissa eri tuotantovaiheissa ja tässä esityksessä tutkitaan valmiin taivekartongin ominaisuuksien muuttumista rullausvaiheessa. Rullausvaihe on viimeisimpiä kartonkitehtaalla tehtäviä prosesseja ja sen aiheuttamat muutokset valmiiseen lopputuotteeseen ovat olleet heikosti ymmärrettyjä.

Tutkielman tarkoituksena on selvittää rullauksen teoria pituusleikkauksen kiinnirullausvaiheessa sekä empiirisesti tutkia erilaisten käytössä olevien leikkurien kiinnirullauksen aiheuttamia muutoksia taivekartongin ominaisuuksiin.

Taivekartongin rullauksessa kokoonpuristuvan ytimen ympärille kiedotaan venyvää materiaalia. Teoreettinen tarkastelu on erittäin monimutkainen ja toisaalta mallin ennustettavuus ei ole täysin realistinen johtuen useista muuttujaepävarmuuksista ja yksinkertaistuksista.

Radiaalissuuntaista jännitysjakaumaa kuvaa paksuuden muutos rullan säteen funktiona. Tangentiaalissuuntaista jännitysjakaumaa on monimutkaista mitata. Mittaus tulisi suorittaa aukirullaamalla valmiita rullia, mutta se ei ole taloudellisen hyötyarvon kannalta mahdollista tässä tutkimuksessa. Empiirisessä tutkimuksessa jouduttiin käytännön syistä sekä tuotannollis-taloudellisten syiden nojalla turvautumaan useisiin yksinkertaistuksiin. Pinnan laatuominaisuuksien muutoksilla kyetään arvioimaan rullan tangentiaalissuuntaisia jännityksiä.

TAIVEKARTONKI JA SEN VALMISTAMINEN

Taivekartonki on monikerroksista koteloissa käytettävää kuluttajapakkauskartonkia. Siinä on yleensä kolme rakenteellista kerrosta, joiden tarkoitus on eri ominaisuuksien optimointi minimikustannuksin. Kuvassa 1 on esitetty periaatekuva taivekartongin rakenteesta.

Taivekartonki

Käytetään lääketuotteiden, pakasteiden, kylmäsäilytettävien ja muiden ruokien, konditoriatuotteiden, juomien ym. pakkaamiseen



Kuva 1: Taivekartongin rakenne [2]

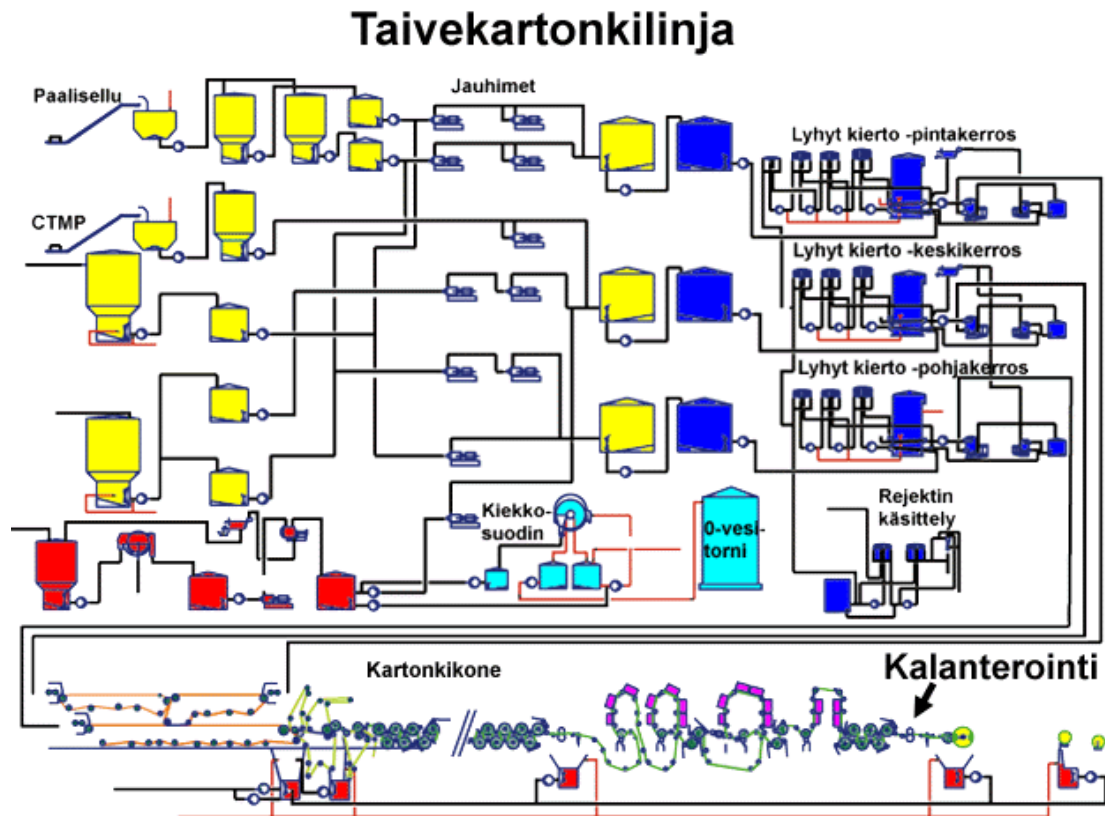
Taivekartongista valmistetaan erilaisia pakkauksia, kuten esimerkiksi koteloita ja rasioita. Neliömassat vaihtelevat loppukäytöstä riippuen suuresti ollen yleensä 200-400g/m². Tärkeimmät kartongilta vaadittavat ominaisuudet ovat ennen kaikkea jäykkyys sekä erinomaiset paino-ominaisuudet. [11, s. 99]

1.1. Taivekartongin valmistusprosessi

Taivekartongin valmistusprosessi eroaa tavallisesta paperinvalmistuksesta siten, että siinä on erillisjauhatukset pinta-, keski- ja pohjakerroksille on omat jauhatuksensa. Eri

kerrokset omaavat myös konelinjassa erilliset lyhyet kiertonsa sekä viiraosansa perälaatikkoineen. Kerrokset liitetään yhtenäiseksi vasta ennen puristinosaa.

Taivekartongin tuotannolle on tyypillistä kiillotussylinterin eli ns. jenkkisylinterin käyttö tehostamaan kuivatusta ja pintakerroksen kiillottumista. Erinomaiset paino- ja pintaominaisuudet vaativat kartongin pinnan pintaliimaamista, kalanterointia sekä päällystämistä useaan kertaan sekä pinnan että pohjan puolelta. Alla olevassa kuvassa 2 on esitetty esimerkkikuva taivekartongin valmistusprosessista.



Kuva 2: Esimerkkikuva taivekartonkilinjasta [2]

Kartonkikone tuottaa suunnitteluleveytensä mukaisia suuria konerullia, jotka ovat sellaisenaan mahdottomia käsitellä asiakkaan toimesta loppukäytöstä riippumatta. Pituusleikkauksen tarkoituksena on jalostaa konerullat asiakkaan haluamiin helposti varastoitaviin ja kuljetettaviin rullakokoihin. Pituusleikkaus voidaan nähdä myös testinä valmiin rainan ajettavuudesta painokoneilla.

Käyttökohteidensa vuoksi taivekartongin ominaisuuksien täytyy olla erinomaisia sekä lujuuden että painettavuuden kannalta. Taivekartongin rakenne on tyypillinen komposiittirakenne, jossa lujat pintakerrokset yhdessä paksun keskikerroksen kanssa luovat rakenteesta lujan kokonaisuuden. Ominaisuuksiensa johdosta taivekartonki on

haastavaa rullausprosessille, sillä ominaisuudet eivät saa huonontua rullauksen aiheuttamien suurten jännitysten vuoksi.

1.2. Taivekartongin ominaisuudet ja niiden mittaaminen

1.2.1. Kiilto

Taivekartongin optiset ominaisuudet määrittävät sen ulkonäön. Optiset ominaisuudet tarkoittavat kartongin ja siihen kohdistuvan valon vuorovaikutusta. Osa pintaan kohdistetusta valosta heijastuu takaisin peilin tavoin. Kiilto kuvaa kartongin kykyä heijastaa suunnattu valonsäde siten, että tulevan ja heijastuvan säteen muodostamat kulmat pinnan normaalin kanssa ovat yhtä suuret. [2]

Vaikka kiilto ei useimmissa tapauksissa ole tavoite sinänsä, antaa se painojäljelle syvyyttä ja parantaa erityisesti monivärikuvien painettavuutta. Sen vaikutus myös painojäljen densiteettiin eli tummuusarvoon on selvä. Kiilto on kartongin tilasuure, joka on helppo mitata ja indikoi painojäljen laatua. [2]

Kartongin kiilto on merkki siitä, että sen pinta on mikrosileä, jolloin sille on mahdollista painaa tasalaatuinen kuva. Kuitenkin on tapauksia, joissa hyvä kiilto ei johda hyvään painojälkeen, sillä kartongin pinta saattaa olla niin huokoinen, että se imee osan painoväreistä sisäänsä. [2]

Luontevin tapa kiillon mittaamiselle on koepainattaa valmistettava kartonki ja mitata painojäljen lopullinen kiilto. Tämä on kuitenkin hidas tapa ja tuotanto-olosuhteissa toimivin ratkaisu on mitata kartongin kiilto ja ennustaa sen avulla painojäljen lopullista kiiltoa. [2]

1.2.2. Paksuus ja bulkki

Kartongin paksuus määritetään sen pintojen välisenä etäisyytenä. Paksuuden ja neliömassan avulla lasketaan kartongin kiintotiheys, joka ilmoitetaan massana tilavuusyksikköä kohti. Bulkki on kiintotiheyden käänteisarvo. [2]

Kartongin taivutusjäykkyys muodostuu sen jäyhyysmomentin eli paksuuden ja elastisten ominaisuuksien (mm. kimmokerroin) vaikutuksesta. Kartongin bulkki ja siten yleensä myös taivutusjäykkyys ovat ristiriidassa muiden kriittisten ominaisuuksien kanssa. Valmistusprosessi onkin usein optimoitu muiden ominaisuuksien perusteella, jolloin bulkin ja taivutusjäykkyyden kannalta joudutaan tyytymään epäoptimaaliseen tasoon. [2]

Paksuuden mittaamisessa on hyvä huomioda, että pinopaksuus ja yksittäisen arkin paksuus eivät korreloi keskenään täydellisesti pintojen epähomogeenisuuden vuoksi.

1.2.3. Jäykkyys

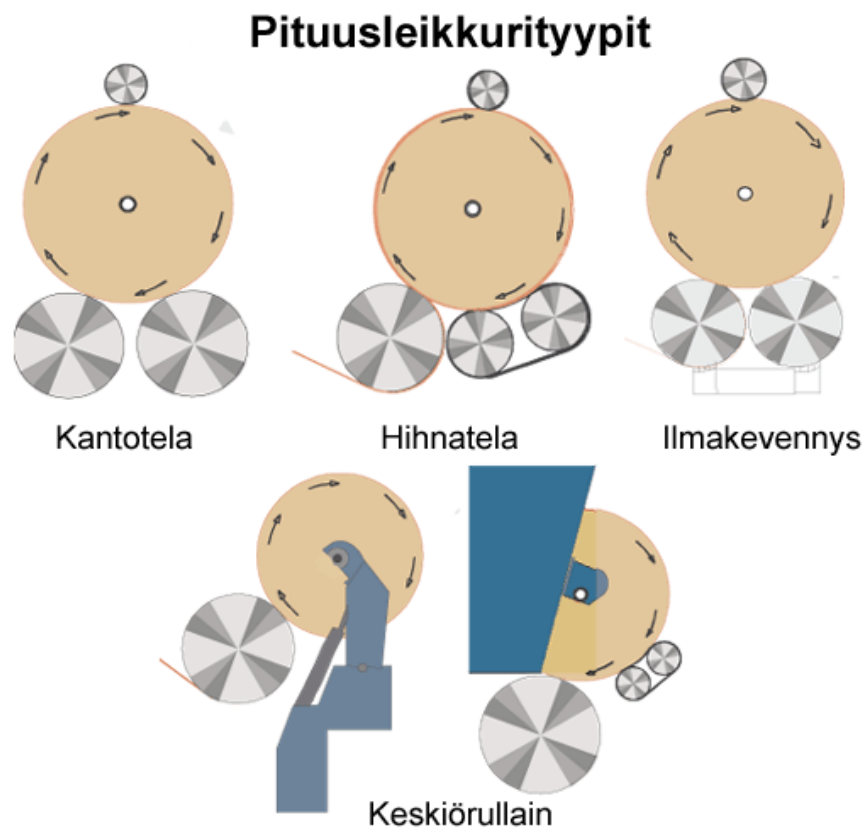
Jäykkyys on yksi kotelokartonkien ajettavuuden tärkeimmistä ominaisuuksista. Jäykkyyteen vaikuttavat kartongin paksuus ja eri kerrosten kimmokertoimet. Yleensä kolmikerroskartongin hyvään jäykkyyteen päästään tekemällä keskikerros paksuksi ja bulkkiseksi sekä pintakerrosten kimmokertoimet korkeiksi. [2]

Jäykkyyden optimointi on ongelmallista. Kartongin kuljetus on kallista, joten painoa on minimoitava ilman jäykkyyden ja paksuuden menetystä. Valmistuksen raaka-aineita säästyy valmistamalla entistä kevyempiä kartonkilajeja, mutta asiakkaat kuitenkin vaativat paino-ominaisuuksilta entistä enemmän, eikä pinnan laatu saa näin ollen heiketä.

PITUUSLEIKKAUS

Pituusleikkauksessa konerulla jaetaan asiakkaan haluamiin rullaleveyksiin ja pituuksiin. Yhtä kerrallaan leikattavaa rullapituutta kutsutaan muutoksi. Pituusleikkurilla valmistettavien rullien on kestävä pakkauskäsittely, varastointi, kuljetus sekä erinäisiä jatkokäsittelytoimenpiteitä. Hyvässä, edellä mainitut kriteerit täyttävässä rullassa on tiukkuuden oltava hylsylvä ulkokehälle päin tultaessa tasainen ja mieluummin tasaisesti laskeva. Kaikki jyrkät muutokset tiukkuudessa tai kovuudessa vaikuttavat negatiivisesti rullan ominaisuuksiin.

Pituusleikkausprosessi voidaan jakaa kolmeen osakokonaisuuteen, joita ovat aukirullaus, leikkaus ja kiinnirullaus. Erilaiset rakenneratkaisut teollisuudessa käytössä olevissa leikkurikonsepteissa eroavat käytännössä vain kiinnirullauksen osalta. Alla olevassa kuvassa 3 on esitetty erilaisia leikkurirakenneratkaisuja kiinnirullaamiseen.



Kuva 3: Eri pituusleikkurityyppien rakenneratkaisuja kiinnirullauksen osalta [2]

1.3. Pituusleikkauksen osaprosessit

1.3.1. Aukirullaus

Aukirullauksessa konerulla sijoitetaan rullaustelineeseen, jossa konerullan pohjana olevan tambuuriraudan käyttöakselin hammaskytkin kiinnitetään rullaustelineen jarrujärjestelmään. Radan kireyttä leikkauksen aikana hallitaan jarrujärjestelmällä, joka voi olla mekaaninen, pneumaattinen, hydraulinen tai sähköinen. Rullaustelineessä on mahdollisuus myös pyörittää rullaa pääviennin helpottamiseksi sekä rullan mahdollisten huonojen pintakerrosten kuorimiseksi. [1, s. 150]

1.3.2. Leikkaus

Leikkausosuudella kartonkiraina leikataan asiakkaan tilaamiin rullaleveyksiin ja rainasta poistetaan laatuvaatimuksien ulkopuolella olevat reunanauhat. Leikkaus toteutetaan perinteisesti mekaanisella teräparilla. Teräparista alaterä on yleensä käytöllinen ja pyörittää käytöntä yläterää. Teräparit ovat suunniteltu liikutettaviksi johteitaan pitkin eri levyisten osarainojen aikaansaamiseksi. Leikkuujälkeen vaikuttavat teräparien mekaaninen linjaus, terien terävyys ja pyörimisnopeus suhteessa rainaan sekä rainan kireys ja suoruus leikkuukohdalla. Terien leikkuunopeuden on oltava hieman suurempi kuin rainan nopeus tyydyttävän leikkuujäljen saamiseksi. Vesileikkaus ja laser voivat tulevaisuudessa syrjäyttää perinteisen pyöröterän paremman leikkuujäljen ja pienemmän pölyävyyden aikaansaamisessa. [1, s. 152] [2]

1.3.3. Kiinnirullaus

Kiinnirullauksessa leikatut kartonkirainat rullataan hylsyjen ympärille. Rullausmekanismi voidaan jakaa kolmeen eri kategoriaan, joita ovat keskiövedollinen rullaus, pintavedollinen rullaus ja näiden yhdistelmä. [1, s. 152]

Konventionaalisessa pintavetoon perustuvassa kantotelaleikkurissa leikattu rulla muodostuu kahden metallisen telan päälle. Sivusuuntainen tuenta toteutetaan hylsyjen päihin tulevilla karalukoilla ja pystysuuntainen tuki tulee päälle laskettavasta painotelasta. Rullan muodostuessa nippikuormaa hallitaan painotelan kuormitusta pienentämällä, mutta nykyisillä suurilla rullan halkaisijoilla rullan oma massa on hyvin suuri aiheuttaen suuria jännityksiä nippiin joutuvalle rainalle. [1, s. 153] [2]

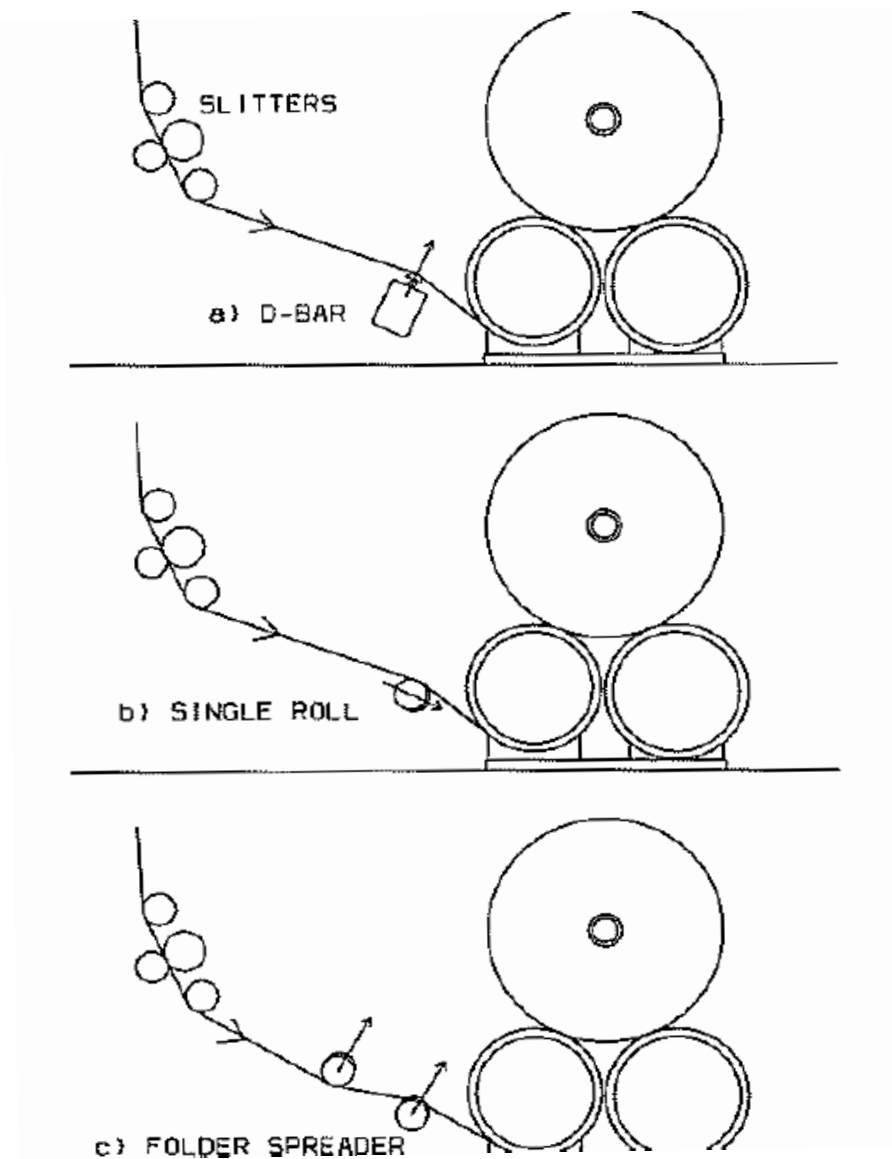
Edellä mainittujen nippivoimiin liittyvien ongelmien hallitsemiseksi on perinteistä kantotelaleikkuria kehitetty erilaisin tavoin. Valmistajasta riippuen ratkaisuja ovat mm. toisen kantotelan korvaaminen telahihnastolla, ilmapatjan muodostaminen kantotelojen ja rullan väliin sekä kantotelojen päällystäminen pehmeillä telamateriaaleilla. Eräs ratkaisu nippivoimien hallintaan on kantotelojen rakennegeometrian muuttaminen rullan säteen funktiona, jolloin raina ei joudu suuren viivakuormituksen alaiseksi koko rullan painon kohdistuessa siihen. [1, s. 154] [2]

Keskiörullaimen toiminta perustuu keskiövetoon eli rullan pyörittämiseen sen sisällä olevaa hylsyä apuna käyttäen. Osa valmistajista tukee valmistuvaa rullaa painoteloilla,

jolloin rullaustapa tällaisessa konseptissa on yhdistetty keskiö- ja pintaveto. Keskiörollaimelle on tyypillistä, että jokainen rulla muodostuu omassa yksikössään, jolloin rullausparametreja voidaan säätää rullakohtaisesti. [2]

1.3.4. Rainojen levitys ja osarainojen erotus

Edellä mainittujen pääprosessien lisäksi pituusleikkauksessa on osaprosesseja, kuten esimerkiksi rainan levitys ja osarainojen erotus. Levityksessä raina ohjataan kaarimaisen telan, telaparin tai levityspalkin päälle, jolloin se pakotetaan leveämmäksi. Leikkauksen jälkeen osarainat on erotettava toisistaan rullausta varten. Alla olevassa kuvassa 4 on esitelty erilaisia konsepteja rainojen levitykseen sekä erotteluun.



Kuva 4: Erilaisia radan levitysratkaisuja [1, s.230]

D-palkkilevitys on paikallaan pysyvä levityskonstruktio. Siinä on kaareva muoto, joka pakottaa ylitseen kulkevan radan leviämään. D-palkki lisää koneen suuntaista jännitystä radan keskellä aiheuttaen rainan hakeutumisen uuteen tilaan. [1, s. 229]

D-palkin paras sovellusryhmä on kapeat leikkurit, joissa ei ole montaa leikkauskohtaa, sillä pyörimättömänä konstruktiona D-palkki aiheuttaa vakavaa pölyämistä. Palkin kaarimaisuutta tulee kyetä säätämään rullauksen aikana rullien erottamiseksi. Radan leviämistä hallitsevat D-palkkikonstruktiossa telojen ja levityksen etäisyydet, kaarimaisuus, levityksen tulokulma sekä kaarimaisuuden suunta. [1, s. 229]

Yhden levitystelan konstruktiossa kaarimaisuus on radan suuntainen. Radan leviäminen tapahtuu sen kulkusuunnan ja levitystelan pyörimistason välisen erokulman avulla. Erokulma aiheuttaa rainan leviämisen levitystelan tangentin suuntaan kitkavoimien avulla. Levitystelan tulee sijaita lähempänä kantotelaa kuin edellistä johtotelaa. Telan kaarimaisuuden on oltava oikeanlainen, sillä kitkan hävitessä radan reunoilta, eivät ne leviä tasaisesti. [1, s. 230]

Taittolevityksessä rata ohjataan kahden kaarimaisen telan kautta. Telojen kaarimaisuudet ovat itseisarvoltaan samansuuruiset, mutta erimerkkiset. Telojen kaarimaisuus on kohtisuorassa radan kulkusuuntaan nähden. Kohtisuoruus on erittäin tärkeää tasaisen levityksen tai osarainojen erottelun aikaansaamiseksi. Kulkiessaan ensimmäisen levitystelan läpi osarainojen suuntakulmat muuttuvat, mutta ne palautuvat koneensuuntaisiksi toisen levitystelan jälkeen. Levitystä hallitsevat levitysteloiden halkaisijat ja kaarimaisuudet, osarainojen leveydet sekä levitysteloiden keskinäinen asemointi. Taittolevitys on toimiva ratkaisu kaikentyyppisissä leikkureissa. Telojen keskinäinen asemointi ja niiden kaarimaisuuden kohtisuoruus rataa vasten ovat erittäin tarkkoja, joten leveissä leikkureissa mahdolliset virheet kertaantuvat. [1, s. 231]

1.4. Pituusleikkurin automaatio

Perinteisesti prosessi- ja koneautomaatio ovat olleet kaksi erillistä tutkimusaluetta. Paperin pituusleikkausprosessi on kuitenkin yhdistelmä näistä kummastakin ollen varsin monimutkainen järjestelmä hallittavaksi. Asiakasrullan vaatimuksista ja halutuista ominaisuuksista riippuen leikkurin ohjausjärjestelmässä voi olla erilaisia ajoreseptejä joka trimmille loppuasiakkaasta ja kartonki- tai paperilaadusta riippuen. Käytännössä kuitenkin on hyvin vaikea mitata valmistuneen asiakasrullan ominaisuuksia rikkomatta sen rakennetta. Asiakasrullien laatuviat ovat erittäin kalliita valmistajan näkökulmasta, jolloin leikkaus- ja rullausprosessilta vaaditaan korkeaa laatua. Ennen asiakasrullan laatua kyettiin tarkastelemaan vain ulkopuolelta erilaisin testimenetelmin, kuten esimerkiksi PAROtest, SmithNeedle tai koputtelemalla rullia puisella kepillä. Tulevaisuudessa erilaiset rullausparametreihin perustuvat mittausmenetelmät tulevat varmasti valtaamaan alaa.

Pituusleikkureissa on useiden prosessimuuttujia kontrolloivien järjestelmien lisäksi monia nopeita servo-ohjattuja paikannusta ja voimia hallitsevia laitteita.

Käytettyjen rakenneratkaisujen on oltava värähtelyjä vaimentaakseen massiivisia, joten liikuteltavat massat ovat hyvin suuria. Koska pituusleikkaus on prosessina syklinen ja sen on pysyttävä jatkuvatoimisen kartonkikoneen mukana, on ajosekvenssien oltava nopeita. [4, s. 18]

Yleensä yhden kartonkikoneen kanssa riittää yksi pituusleikkuri, mutta modernien kartonkikoneiden kanssa leikkurilta vaaditaan paljon. Kartonki on lajina vahvaa, joten suuria ajonopeuksia ja kiihtyvyyksiä voidaan käyttää. Usein leikkauksessa havaitut ongelmat eivät liity rullien laatuun, vaan esimerkiksi äänitasoon, pölyyn sekä leikkurin käytettävyyteen ja kapasiteettiin. Leikkurin kapasiteetille on tärkeää kunnollinen reunanauhojen hallinta korkea-kapasiteettisten pulppereiden avulla. [3]

1.4.1. Automatisoidut toiminnot

Pituusleikkurin on pysähdyttävä jokaisen muutonvaihdon yhteydessä. Pysyäkseen jatkuvatoimisen kartonkikoneen perässä on leikkurin toiminnot oltava pitkälle automatisoituja sekä ajosekvenssien nopeita. Yleisimmin käytetyt automatisoidut toiminnot ovat:

- Leikkuuterien paikoitus
- Tyhjän tampusiraudan poisto
- Tambuurin syöttö
- Tambuurien erotus
- Hylsyjen liimaus
- Hylsyjen sisäänsyöttö
- Rainan leikkaus
- Muutonvaihto
- Häntien liimaus tai teippaus

Näitä automatisoituja toimintoja voidaan ryhmitellä erilaisten sekvenssien alaisuuteen, jotta leikkausprosessista saadaan jatkuva eikä ajohenkilöstöä tarvita kuin toiminnan valvomiseen ja mahdollisten ongelmatilanteiden selvittämiseen. [3]

1.5. Ajoparametrit kantotelaleikkurissa

Kantotelaleikkurin ajoparametreja ovat ratakiireys, nippikuorma ja rullausvoima. Rullausvoimalla tarkoitetaan takimmaisesta kantotelan luomaa momenttieroaa, joka aikaansaa tangentiaalissuuntaisen rullausvoiman. Ratakiireyttä hallitaan aukirullauksen jarrutuksella ohjain- ja levitystelojen antamien kireyssi-signaalien avulla. [4, s. 18]

Ensimmäisen nipin tärkeimmät tehtävät ovat rullan tiukkuuden säätö sekä ilman tunkeutumisen estäminen. Nippivoiman määrittävät muuton paino sekä painotelan kuormitus. Rullauksen alussa muuton paino on minimaalinen ja painotelan kuormituksella säädetään nippikuorma. Muuton painon kasvaessa painotelan kuormitusta pienennetään. Lopullisen nippikuormituksen määrittelevät muuton

halkaisija sekä rullan tiheys, sillä painotelaa pidetään muuton päällä vain turvallisuussyistä estämään rullien poistumisen. [2]

Konventionaalisessa kantotelaleikkurissa nippikuorma kasvaa kontrolloimattomasti rullan halkaisijan kasvaessa. Painotela voi vain lisätä nippivoimaa, muttei vähentää sitä. Korkea nippikuorma suurilla rullahalkaisijoilla voi aiheuttaa erilaisia vikoja rulliin. Viat ovat yleensä lähtöisin neliömassa- ja paksuusvaihteluista, jotka kumuloituvat rullauksessa aiheuttaen erilaisia ryppyjä ja vanoja rulliin. [2]

Kolmas ajoparametri on rullausvoima, joka on ensimmäisen nipin jälkeinen etummaisen kantotelan kontrolloima voima. Rullausvoimaa voidaan pitää ratakiireytenä ennen rullaamista. Rullausvoiman kasvattaminen kiristää rullaa. Radan kiireyden kasvattaminen ja rullausvoiman lisääminen pienentävät nippivoiman vaikutusta, joten näiden parametrien kasvattaminen auttaa mahdollisesti suuren nippikuorman aiheuttamiin rullavikoihin. [2]

1.6. Modifioidut kantotelaleikkurit

1.6.1. Pehmeillä materiaaleilla pinnoitetut kantotelat

Korkeiden nippivoimien aiheuttamien vikojen takia on konventionaalista kantotelaleikkuria kehitetty päällystämällä etummainen kantotela pehmeällä telamateriaalilla. Pehmeä materiaali leventää nippiä pienentäen nipin huippupainetta ja kantotelan tunkeutumista rullaan. Pehmeän telamateriaalin hyödyn optimointi vaatii kimmokertoimen ja Poissonin kertoimen sovituksen rullan materiaaliarvojen mukaan. Nipin leventämiseksi tulee telan kimmokertoimen olla pienempi tai vähintään yhtä suuri kuin rullan kimmokerroin. Materiaalien tulee myös olla erittäin huolellisesti suunniteltu elastisuuden ja kestävyuden ehdoilla. Etumaisen kantotelan päällystäminen pehmeämmällä materiaalilla aiheuttaa painojakauman muutoksen, sillä rullan puristuessa etummaista telaa vasten siirtyy muuton paino enemmän sen kannateltavaksi. [2]

1.6.2. Ilmakevennys

Kantotelaleikkuri voidaan varustaa paineilmalaitteistolla, joka aikaansaa ylipaineen valmistuvan rullan ja kantotelojen välille. Painoa kannatteleva alue kasvaa rullan halkaisijan kasvaessa, joten ilmakevennys toimii vain pienellä paineella. Ilmakevennystä voidaan käyttää huokoisilla paperi- ja kartonkilajeilla, joilla ilman pääsy rullan sisään ei aiheuta ongelmia. [2]

1.6.3. Hihnatuenta

Hihnatuenta perustuu rullausgeometriaan, jossa rullan valmistuessa sen painoa kannatellaan enemmän ja enemmän hihnatuennalla. Tämä vähentää nippikuormaa tasolle, jossa se ei aiheuta ongelmia rulliin, mutta estää kuitenkin ilman pääsyn rullan sisälle. Hihnatuennalla kantotelaleikkurissa nippivoimaa voidaan automaattisesti hallita

erilaisilla rullien tiheyksillä hihnan kireyden avulla. Nippivoiman erittäin tarkka hallinta mahdollistaa rullauksen kireyden kontrolloimisen kantotelan ja hihnaston momentilla. Rullauskireys on tasainen joka kerroksessa ja muuton jokaisessa rullassa. Tällainen leikkurityyppi soveltuu hyvin useille eri paperi- ja kartonkilaaduille. [2]

1.6.4. Muuttuva geometria

Kantotelaleikkurin rullausgeometriaa voidaan uusimmissa rullaintyypeissä muuttaa rullan halkaisijan suhteen. Rullauksessa etummaisen kantotelan ja painotelan asemaa voidaan muuttaa mahdollistaen optimaalisen rullaustuloksen erikokoisilla hylsyillä ja rullilla. Geometrian muuttaminen auttaa värähtelyjen hallinnassa, jolloin suurempia ajonopeuksia voidaan käyttää.

RULLAUKSEN TEOREETTINEN MALLINNUS

Rullauksen mallintaminen on rullan muodostumisen esittämistä matemaattisin keinoin. Matemaattinen esitystapa ja logiikka perustuvat perinteiseen mekaniikkaan. Rullauksen teorian tarkoituksena on pyrkiä ennustamaan rullan sisäisiä voimia ennalta tunnettujen ulkopuolisten kuormitusten avulla. Tämä johtaa kontinuumimekaniikan reuna-arvotehtävään. Perusyhtälöryhmä koostuu seuraavista yhtälöistä:

- Liiketyhtälöt
- Yhteensopivuusyhtälöt (siirtokoordinaattien keskinäiset yhtäläisyydet)
- Materiaaliyhtälöt

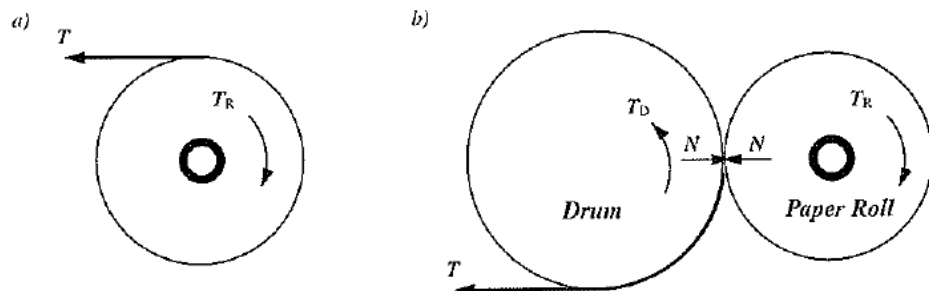
Näiden yhtälöiden ratkaisemiseksi, on niitä yksinkertaistettava seuraavin tavoin:

- Rullan kuormituksen oletetaan olevan tasomainen (kaksiulotteinen)
- Rainan spiraalimuotoa rullassa approksimoidaan päällekkäisten renkaiden avulla
- Liiketyhtälöt ovat staattisia (tai näennäisesti staattisia)
- Materiaaliyhtälö noudattaa Hooken lakia muuttuvine vakioineen

Useita erilaisia rullausmalleja on kehitetty näiden rajoitusten avulla. Tarkkojen rullausteorioiden kulmakivinä voidaan pitää Altmannin lineaarista anisotrooppista mallia vuodelta 1968 [6, s.176-179] ja Hakielin epälineaarista anisotrooppista mallia vuodelta 1986. Näitä malleja on kehitetty mm. lisäämällä niihin yhtälöitä viskoelastisuudesta sekä ottamalla huomioon keskipakovoimat ja rullan sisään pääsevä ilma. Tällä hetkellä puuttuu kuitenkin vielä yhtenäinen teoria, joka ottaisi huomioon telojen ja rullan välisen nipin aiheuttamat voimat. Täydellisen mallin puuttuminen estää rullausmekanismien täydellisen teoreettisen tarkastelun, sillä jokainen käytössä oleva rullauskonsepti sisältää erilaisia nippikosketuksia. Rullauksen perusteorian ymmärrys antaa kuitenkin hyvät lähtökohdat ongelmien ratkaisuun jo sekä olemassa olevissa järjestelmissä että uusien ratkaisujen suunniteltaessa.

Rullan sisäistä jännitystä hallitaan kolmella rullausparametrilla, joita ovat radan kireys, nippikuorma ja rullausmomentti. Radan kireyttä hallitaan aukirullauksessa rullausmoottorin jarrujärjestelmän kautta erilaisin voimansiirtomekanismein. Nippikuormaan voidaan vaikuttaa painotelan kuormituksen sekä hylsyn kannatuksen avulla. Rullausmomentti toteutetaan muodostuvan rullan ja kantotelojen välisellä momenttierolla.

Kappaleen alla oleva kuva 5 esittää yksinkertaistetusti perinteisen kantotelaleikkurin rullaustapahtuman hallintaa. Hallittavia suureita ovat ratakiureys T , nippivoima N ja momenttiero $\Delta T = T_R - T_D$. Kuvasta huomataan, ettei ratakiureys T ole sama kuin sisäänrullauskiureys WIT (Wound-In-Tension). WIT -kiureys määrittelee valmistuvan asiakasrollan kiureyden ja siihen vaikuttavat pintavedollisessa rullauksessa kaikki rullausparametrit. Rullausparametrit eivät kuitenkaan ole toisistaan riippumattomia, vaan muutokset yhdessä parametrissa muuttavat toista parametria. [1, s. 217]



Kuva 5: Rullaustapahtuman hallinta [1, s. 219].

1.7. Rullauksen mallintaminen

Kaikki erilaiset rullaustapahtumaa kuvaavat mallit koostuvat samoista peruseriaatteista, kuten kinemaattisesta yhtäläisyydestä, materiaalien käyttäytymisestä, kahdesta reunaehdosta sekä niitä soveltavasta algoritmista. Eri rullausmallit eroavat käytännössä katsoen pelkästään tarkkuudellaan ja yksityiskohtaisuudellaan sekä käytettävästä ratkaisualgoritmista.

Kinemaattiset yhtälöt ja materiaaliehdot on malleissa yhdistetty yksinkertaisen toisen asteen differentiaaliyhtälön muotoon. Koska tällaisen yhtälötyypin ratkaisemiseen vaaditaan kaksi reunaehto, on ensimmäiseksi reunaehdoksi määritetty hylsyn pinta sekä sen tunnettu jäykkyys. Toinen reunaehto on rullan ulkopinta ja siihen kohdistuva tunnettu rullauskiureys. Mallista johdettu algoritmi toimii siten, että se rakentaa rullan jokainen kerros kerrallaan ja laskee voimat yksitellen joka kerrokselle. Näin ollen algoritmin pohjalta on mahdollista saada rullan voimajakauma säteen suunnassa. [5, s. 60]

1.7.1. Materiaalivakiot

Rullausmalleihin tarvitaan syöteinä neljä erilaista rullattavasta materiaalista riippuvaa vakiota. Näitä vakioita ovat radiaalissuuntainen (pinosta mitattu) kimmomoduuli, tangentialissuuntainen kimmomoduuli sekä kaksi Poissonin vakiota.

Tangentialissuuntainen kimmomoduuli, E_T , on kaikkein helpoin määrittää. Mittaus voi tapahtua tavallisella vetojännityslaitteella jännitys-venymä -kuvaajan

saamiseksi. Kuvaajasta lasketaan käyrän kulmakerroin, josta saadaan määritettyä kimmokerroin jakamalla se radan paksuudella ja mahdollisesti leveydellä mittalaitteesta riippuen. [5, s.62]

Poissonin vakioden määrittäminen pinolle on erittäin hankalaa. Kaksi tarvittavaa Poissonin vakiota ovat μ_{RT} radiaalissuuntaiselle venymälle tangentialissuuntaisen kuormituksen alla ja μ_{TR} tangentialissuuntaiselle venymälle radiaalissuuntaisen kuormituksen alla. Mittaukset on tehtävä pinosta, sillä yksittäisistä arkeista tehdyt mittaukset eivät ole riittävän eksakteja. Mittauksia voidaan suorittaa mm. laseria apuna käyttäen, mutta ne ovat hankalia toteuttaa. Vaikka Poissonin vakiot ovat vaikeita määrittää, ei niillä ole lopputulokseen suurta merkitystä. Monet tutkijat käyttävätkin pientä arvoa kummallekin Poissonin vakiolle, esimerkiksi 0,01. [5, s. 62]

Radiaalissuuntainen kimmomoduuli, E_R , ei ole hankala määrittävä, mutta mittaus on työläs. Se on materiaalipinon radiaalissuuntaisen kuormitus-venymä -käyrän kulmakerroin. Mittaus tapahtuu määrittämällä materiaalipinon puristuvuutta tietyillä kuormituksilla useita kertoja. Kimmomoduulin määrittäminen tehdään konventionaalisesti toisen puristus-palautus -kerran datasta. Käyrän kulmakerroin määritetään useista pisteistä. Tämä voidaan tehdä joko käyräsovituksella ja sen derivoinnilla tai numeerisesti derivoimalla data useasta pisteestä ja tekemällä näistä käyräsovitus. Kimmomoduuli ei kuitenkaan voi saada arvoa nolla, sillä rullausmallit eivät hyväksy sellaista syötettä. Sopiva käyräsovitus voi olla esimerkiksi Pfeifferin esittelemä eksponentiaalimuotoinen tai polynomimuotoinen. [5, s.63] [7]

$$\sigma_R = K_1 - K_1 e^{-K_2 \epsilon_R}, \quad (1)$$

missä K_1 ja K_2 ovat käyräsoitusvakioita.

1.7.2. Ensimmäinen reunaehto – hylsyn jäykkyys

Hylsyn jäykkyys on ensimmäinen kahdesta kaikissa rullausmalleissa olevista reunaehdoista. Se ei kuitenkaan ole ratkaisevassa roolissa rullan tiukkuuksia määrittäessä, mutta sen tunteminen vaaditaan rullausmallin ratkaisemiseksi.

Hylsyn jäykkyys sekoitetaan yleensä hylsymateriaalin kimmokertoimeen. Hylsyn jäykkyydellä tarkoitetaan sitä fysikaalista suhdelukua, joka kertoo kuinka paljon tietty kuormitus aiheuttaa muodonmuutosta hylsyn geometriaan. Hylsyn jäykkyys voidaan johtaa hylsymateriaalin ja hylsyn geometrinen muotojen, sisä- ja ulkohalkaisija, avulla. [5, s.57]

Hylsyjä voidaan valmistaa useista erilaisista materiaaleista. Erilaiset materiaalit käyttäytyvät rasituksen alla kuitenkin eri tavoin. Koska materiaalilla on erittäin suuri merkitys hylsyn jäykkyyden määrittämisessä, täytyy hylsyn jäykkyydelle johtaa kaksi erillistä kaavaa. Ensimmäinen johdettu yhtälö (kaava 10) selittää isotrooppisten ja toinen (kaava 20) anisotrooppisten materiaalien hylsyjäykkyyden. Materiaalitekniikassa isotropialla tarkoitetaan yleisesti sitä, että materiaaliominaisuudet ovat samat eri

suunnissa. Anistoropia on isotropian vastakohta eli materiaaliominaisuudet riippuvat mittaussuunnasta. Isotrooppisista materiaaleista tehtyjä hylsyjä ovat esimerkiksi metalli- ja muovihylsy ja anisotrooppisia hylsymateriaaleja ovat esimerkiksi kartonki ja kuidut. [5, s.57]

Rullaa suunniteltaessa halutaan usein määrittää rullan radiaali- ja tangentialissuuntaiset jännityksen rullan alussa eli hylsyn ympärillä. Materiaaleille, jotka ovat taipuvaisia esimerkiksi bulkin menetykseen, jännitysgradientti riippuu yleensä näytteen paikasta rullan radiaalissuunnassa. Rullattavan materiaalin jäykkyyden olisi ideaalitapauksessa oltava sama kuin hylsyjäykkyyden. Tämä johtaa siihen, että hylsystä tulisi liian pehmeitä, herkkiä ja kalliita sekä rullien jatkokäytön kannalta sopimattomia. Näin ollen mahdollisiin materiaalimenetyksiin on varauduttava hylsyn ympärillä. [5, s.60]

Hylsyn jäykkyyden määrittäminen aloitetaan määrittämällä jäykkyys radiaalisen kuormituksen ja radiaalisen muodonmuutoksen osamääräksi.

$$E_c = \frac{\sigma_R}{w/r}, \quad r = r_0, \quad (2)$$

missä E_c on rullausmalleissa käytettävä hylsyn jäykkyys,
 σ_R on radiaalissuuntainen kuormitus,
 w on radiaalinen muodonmuutos ja
 r_0 on hylsyn ulompi säde eli rullan sisäsäde.

Kun saatuun yhtälöön lisätään tangentialinen jännityksen ja muodonmuutoksen suhde ja paine negatiivisena radiaalisena kuormituksena, muuntuu kaava uuteen muotoon.

$$E_c = \frac{\sigma_R}{\frac{wd\theta}{rd\theta}} = \frac{\sigma_R}{\varepsilon_T} = \frac{-P_0}{\varepsilon_T}, \quad (3)$$

missä P_0 on radiaalissuuntainen paine hylsyn pinnan ja rullan välillä ja
 ε_T on tangentialissuuntainen jännitys.

Saatu yhtälö voidaan kirjoittaa tutumpaan muotoon, jolloin yhdennäköisyys Hooken lain kanssa tulee ilmi. Nyt kuitenkin yhdistelmä koostuu radiaalissuuntaisesta kuormituksesta ja tangentialissuuntaisesta jännityksestä.

$$\sigma_R = E_c \varepsilon_T \quad (4)$$

Radiaalissuuntainen kuormitus-jännitys relaatio isotrooppiselle materiaalille voidaan esittää sylinterikoordinaatistossa seuraavalla tavalla.

$$\varepsilon_T = \frac{\sigma_T - \mu_C \sigma_R}{E_{cm}}, \quad (5)$$

missä σ_T on tangentiaalissuuntainen kuormitus,
 μ_C on hylsymateriaalin Poissonin vakio ja
 E_{cm} on hylsymateriaalin kimmokerroin.

Paineistetussa isotrooppisessa sylinterissä olevia jännityksiä voidaan kuvata seuraavilla yhtälöillä.

$$\sigma_R = \frac{a^2 b^2 (P_o - P_i)}{b^2 - a^2} \frac{1}{r^2} + \frac{P_i a^2 - P_o b^2}{b^2 - a^2} \text{ ja} \quad (6)$$

$$\sigma_T = \frac{a^2 b^2 (P_o - P_i)}{b^2 - a^2} \frac{1}{r^2} + \frac{P_i a^2 - P_o b^2}{b^2 - a^2}, \quad (7)$$

missä a on sisäsäde,
 b on ulkosäde,
 P_i on sisäinen paine ja
 P_o on ulkoinen paine.

Yhtälöissä esiintyvät termit voidaan nimetä uudelleen, jotta ne voidaan sijoittaa edellä mainittuihin kaavoihin. Uudelleen nimeäminen tapahtuu alla esitellyllä tavalla.

$$\begin{aligned} r &= b \\ P_i &= 0 \\ P_o &= P_0 \\ a &= r_c \\ b &= r_0 \end{aligned}$$

Nyt kaavat 6 ja 7 saavat uudet muodot edellä mainituilla muutoksilla.

$$\sigma_R = -P_0 \text{ ja} \quad (8)$$

$$\sigma_T = -P_0 \frac{r_0^2 + r_c^2}{r_0^2 - r_c^2},$$

$$\text{missä } r_c \text{ on hylsyn sisäsäde.} \quad (9)$$

Yhdistettäessä kaavat 4 sekä 7 ja 8 kaavaan 2 saadaan yhtälö isotrooppisesta materiaalista valmistetun hylsyn jäykkyydelle sievennyksen jälkeen alla oleva muotoon.

$$E_c = E_{cm} \frac{r_0^2 - r_c^2}{r_0^2 + r_c^2 - \mu_c(r_0^2 - r_c^2)} \quad (10)$$

Saatu yhtälö voidaan esitellä myös yleisemmässä ja laskennallisesti käyttökelpoisemmassa muodossa, sillä hylsyjen mitat ilmoitetaan yleensä sisähalkaisijan ja seinämän paksuuden avulla.

$$E_c = 2E_{cm} \frac{d_c + t_c}{d_c^2 + 2(1 - \mu_c)(d_c t_c + t_c^2)}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \text{missä } d_c & \text{ on hylsyn sisähalkaisija ja} \\ t_c & \text{ on hylsyn seinämän paksuus.} \end{aligned}$$

Hylsyty voivat olla valmistettuja myös kuitumateriaaleista, jotka ovat anisotrooppisia. Saatu yhtälö voidaan muuntaa toimimaan myös anisotrooppisilla hylsymateriaaleilla Altamannin johtamien kaavojen avulla. [6, s. 176-179]

$$\Xi_R = \frac{E_T}{E_R} \quad (12)$$

$$\Xi_C = \frac{E_T}{E_C} \quad (13)$$

$$\mu = \frac{1}{2}(\mu_T + \Xi_R \mu_R) \quad (14)$$

$$\delta = \frac{1}{2}(\mu_T - \Xi_R \mu_R) \quad (15)$$

$$\gamma = \left| \sqrt{\delta^2 + \Xi_R} \right| \quad (16)$$

$$\alpha = \gamma - \delta \quad (17)$$

$$\beta = \gamma + \delta \quad (18)$$

$$a = \frac{\gamma - \mu - \Xi_C}{\gamma + \mu + \Xi_C} \quad (19)$$

$$b = 1 - a \quad (20)$$

Yllä olevien kaavojen avulla saadaan anisentrooppisille hylsyille jäykkyys määritettyä.

$$E_C = \frac{E_{cR} E_{cT}}{E_{cR} \left(\frac{\alpha - a \beta s^{-2\gamma}}{1 + a s^{-2\gamma}} \right) - \mu_{cR} E_{cT}}, \quad (21)$$

missä E_{cR} on hylsymateriaalin radiaalissuuntainen kimmokerroin,
 E_{cT} on hylsymateriaalin tangentiaalissuuntainen kimmokerroin,
 s on suhdeluku r_0 / r_c ja
 μ_{cR} on hylsymateriaalin radiaalissuuntainen Poissonin vakio.

Hylsymateriaali vaikuttaa hylsyjäykkyyteen ja sitä kautta rullauksen onnistumiseen ja rullan jännitysjaukaumiin. Suunnitelmien mukaisen rullan valmistamiseen vaikuttaa myös hylsyn kosteus suhteessa rullattavan materiaalin kosteuteen. Kosteaa hylsy rullan sisällä luovuttaa kosteutta ympärilleen ja kutistuu sekä aksiaalisesti että radiaalisesti aikaansaaden radiaalissuuntaisen jännityksen pientymisen rullan ja hylsyn välillä. Tämä voi johtaa teleskooppisten rullien syntyyn. [5, s.60]

Hylsyn fyysinen käyttäytyminen rullauksessa vaikuttaa myös rullan muodostumiseen. Hylsy voi taipua kuormitettaessa sitä päistä kantoteloja vasten, jolloin se muuttaa muotonsa suorasta sylinteristä kaarimaiseksi. Hylsy voi myös taipua kaarimaiseksi kuivatuksen tai säilytyksen virheiden takia. Aukirullaus voi muuttaa hylsyn kaarimaiseksi, jos painavaa rullaa kannatellaan vain sen päistä. [5, s.60]

Hylsyjen halkaisijoissa on vaihtelua. Jos samaan muuttoon käytetään hylsyjä, joiden halkaisijat eivät ole tarkalleen yhtäläisiä, vastaanottavat suurimman halkaisijan omaavat hylsytyt kaiken painotelan aiheuttaman nippikuormituksen. Tämä johtaa rainan

epätasaiseen kireyteen rullauksen alussa, koska pienimmän halkaisijan hylsyvät eivät saa minkäänlaista nippipainetta. [5, s.60]

1.7.3. Toinen reunaehto - rullauskireys

Toinen rullausmallien ratkaisuihin tarvittava reunaehto on rullattavan rainan kuormitustila rullan ulkokehällä. Tämä on yhtäläinen sisäänrullauskuormituksen kanssa. Rullaan menevän materiaalin jännitystila vaihtelee rullausparametrien eli ns. TNT-parametrien (Torgue, Nip & Tension) funktiona. Rullattavan materiaalin jännitystä kuvataan usein WIT-kireydeksi (Wound-In-Tension). Kun WIT-kireys tiedetään, voidaan sen avulla määrittää kaksi erilaista reunaehto. [5, s.61]

$$\sigma_R = \frac{-WIT}{r_n} \text{ ja} \quad (22)$$

$$\sigma_T = WIS = \frac{WIT}{h}, \quad (23)$$

joissa	σ_R	on	radiaalissuuntainen (Z-suuntainen) kuormitus
			uloimman rainakerroksen alla,
	σ_T	on	tangentiaalissuuntainen (konesuuntainen) kuormitus
			uloimmassa rainakerroksessa,
	WIS	on	sisäänrullauskuormitus,
	WIT	on	sisäänrullausjännitys,
	h	on	rullattavan rainan paksuus ja
	r_n	on	rullan hetkellinen säde.

Rullausmallin rakennustavasta riippuen käytettävä reunaehto voi olla joko radiaalissuuntainen tai tangentiaalissuuntainen. Yleisimmin rullausmalli rakennetaan radiaalissuuntaisten kuormitusten tarkastelua varten, jolloin reunaehdoksi otetaan σ_R . Reunaehtona voisi olla myös radiaalissuuntaisen kuormituksen nollakohta rullan uloimman kerroksen pinnalla, mutta tämä johtaisi nollajännitysratkaisuun. Reunaehdon on oltava nolasta eroava, jotta triviaaleja ratkaisuja voidaan löytää. [5, s.61]

Sisäänrullausjännitys ja -kuormitus on harvoin vakio koko rullan muodostumisen aikana suunniteltujen ja suunnittelemattomien muutosten takia rullauksen TNT-parametreihin. Rullausmalleissa yleensä huomioidaan WIT ja WIS rullan säteen funktiona. Tällaisen funktion muodostaminen on kuitenkin hankalaa, sillä siinä on useita tuntemattomia muuttujia. On kuitenkin erilaisia keinoja funktion määrittämiseksi ja arvioimiseksi. Kireysfunktio voidaan määrittää aukirullaamalla rullia ja tutkimalla niiden kireysprofiilia. Tämä on kuitenkin kallista ja erittäin hidasta. Toinen

tapa on estimoida rullauksen kireysprofiilia nippipaineen ja rainan kireyden avulla Pfeifferin ehdottaman käyräsovituksen avulla. [5, s.61] [7]

$$WIT = \frac{1}{B} \log \left(\frac{N + A}{A} \right) + \frac{TN}{C + DN}, \quad (24)$$

missä N on nippipaine,
 T on ratakireys ja
 $A...D$ ovat vakiokertoimia käyräsovitukselle.

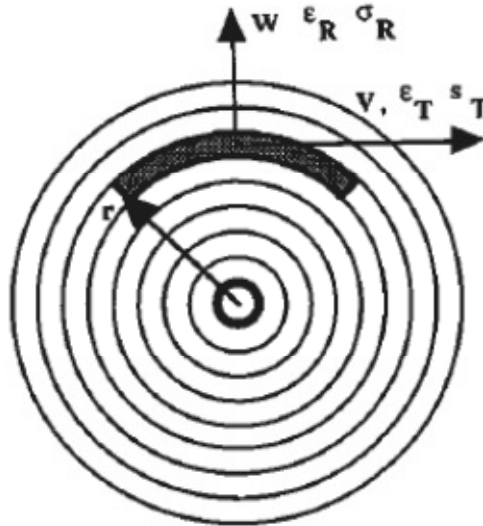
1.8. Hakielin rullausmalli

Hakielin rullausmalli on yksi käyttökelpoisimmista, sillä se huomioi tarpeeksi rullaustapahtuman monimutkaisuutta. Se ei kuitenkaan ole kaikenkattava, mutta se omaa tarpeeksi hyvät lähtökohdat rullan jännitysjaumien karkeaan estimointiin.

Hakielin johtama rullausmalli on anisotrooppinen ja epälineaarinen. Malli on jo niin monimutkainen, että numeeriset approksimaatiot ovat ainoita mahdollisia ratkaisumalleja. Numeerinen analysointi aiheuttaa kuitenkin itsessään virhemahdollisuuden tuloksiin.

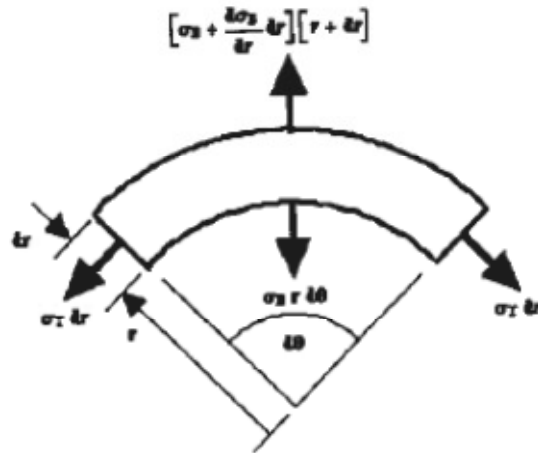
Mallin rakennusyhtälöt ja kokoamistekniikka on yhtäläistä aikaisempienkin rullausmallien kanssa, mutta ratkaisutekniikat eroavat. Hakielin mallissa radiaalissuuntaisen kimmomoduulin, E_R , annetaan olla kerrosten välisestä paineesta riippuva funktio. Mallin perustavat yhtälöt ovat radiaalissuuntainen tasapaino yhdessä kerroksessa ja venymä-siirtymä-ehdot. [5, s. 76]

Kaikki rullausmallit käyttävät kuvan 6 mukaista rengas-approksimaatiota spiraalimaisen rullarakenteen kuvaamiseen. Tämä yksinkertaistus vaatii sen, että kerrosten paksuuksien on oltava pieniä kerrosten halkaisijoihin verrattuna. Koska spiraalimainen rullamuoto on jaettu yksittäisiin ja päällekkäisiin kerroksiin, on jokaisella kerroksella omat siirtymänsä, jännityksensä ja kuormituksensa sekä tangentiaalisessa että radiaalisessa suunnassa.



Kuva 6: Rullan spiraalirakenteen kuvaus rengasapproksimaatiolla [5, s. 54]

Tasapainoehdon ollessa voimassa on voimin summa oltava nolla jokaisella kierroksella. Rulla on sylinterimäinen, joten tangentialisuuntainen voimasumma on nolla automaattisesti. Kuvassa 7 esitellyt radiaalissuuntaiset yhden kerroksen voimat voidaan summata yhteen.



Kuva 7: Yhteen materiaalikerrokseen vaikuttavat radiaalissuuntaiset voimat [5, s. 54]

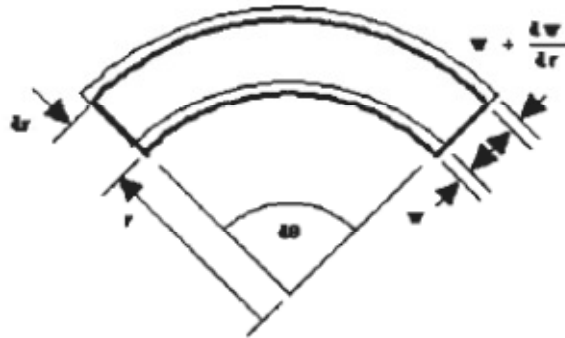
$$\sigma_R r d\theta - \left(\sigma_R + \frac{d\sigma_R}{dr} dr \right) (r + dr) d\theta + 2(\sigma_T dr) \sin \frac{d\theta}{2} = 0 \quad (25)$$

Saatu tasapainoyhtälö voidaan yksinkertaistaa pienillä $d\theta$ arvoilla.

$$r \frac{d\sigma_R}{dr} + \sigma_R - \sigma_T = 0 \quad (26)$$

Tasapainoyhtälö osoittaa radiaalissuuntaisen sekä tangentialissuuntaisen jännityksen riippuvuuden. Toisen muuttaminen muuttaa toista, mutta toisaalta toisen tuntemisen avulla voidaan laskea toinen.

Venymä-siirtymä-ehdot takaavat sen, ettei rullassa ole tyhjiä aukkoja eikä kerroksia ole toistensa päällä. Kerroksen mahdollisia siirtymiä esitellään alla olevassa kuvassa 8.



Kuva 8: Kerrosten siirtymät segmentissä [5, s. 55]

Siirtymä w merkitään siten, että positiivinen suunta on ulospäin. Radiaaliseksi muodonmuutokseksi voidaan määrittää alla oleva yhtälö.

$$\left(w + \frac{dw}{dr} dr \right) - w = \frac{dw}{dr} \quad (27)$$

Saadusta yhtälöstä voidaan määrittää radiaalissuuntainen venymäksi differentiaalisen siirtymän ja alkuperäisen paksuuden osamääräksi.

$$\epsilon_R = \left(\frac{dw}{dr} \frac{dr}{dr} \right) = \frac{dw}{dr} \quad (28)$$

Tangentialiselle muodonmuutokselle voidaan esittää alla oleva kaava.

$$rd\theta - (r + w)d\theta \quad (29)$$

Tangentialiseksi venymäksi saadaan näin ollen määritettyä pituuden muutos jaettuna alkuperäisellä pituudella.

$$\epsilon_T = \frac{wd\theta}{rd\theta} = \frac{w}{r} \quad (30)$$

Jännitys-venymä-ehdot sisältävät sekä radiaalis- että tangentialisuuntaisen kimmokertoimen. Kimmokertoimet ovat radiaalisen ja tangentialisen jännityksen funktioita.

$$E_R = \frac{d\sigma_R}{d\varepsilon_R} = f(\sigma_R, jne.) \quad (31)$$

$$E_T = \frac{d\sigma_T}{d\varepsilon_T} = f(\sigma_T, jne.) \quad (32)$$

Kimmokertoimien ollessa jännitysten ja muiden muuttujien funktioita ovat ne samalla myös säteen funktioita, sillä jännitykset ovat säteestä riippuvaisia. Venymä-jännitys-ehtojen mukaiset kimmokertoimien ja jännitysten suhteet sekä niiden epäsuora riippuvuus säteestä voidaan kirjoittaa alla olevien yhtälöiden avulla. Poissonin vakioiden herkkyys on pieni, joten niiden oletetaan olevan vakioita.

$$\varepsilon_R = \frac{\sigma_R}{E_R(r)} - \mu_T \frac{\sigma_T}{E_T(r)} \quad (33)$$

$$\varepsilon_T = \frac{\sigma_T}{E_T(r)} - \mu_R \frac{\sigma_R}{E_R(r)} \quad (34)$$

Kun hylsyjäykkyydelle aiemmin johdettu yhtälö lisätään edellä mainittujen yhtälöiden joukkoon, saadaan perusyhtälöryhmä, joka määrittelee kaikkien rullausmallien fyysiset käyttäytymisehdot. Seuraavaksi yhtälöt tulee koota toisen asteen differentiaaliseen rullausmalliin.

Venymät voidaan eliminoida tästä yhtälöryhmästä yhdistämällä kaavat 28 ja 32 sekä kaavat 30 ja 34.

$$\frac{dw}{dr} = \frac{\sigma_R}{E_R(r)} - \mu_T \frac{\sigma_T}{E_T(r)} \quad (35)$$

$$w = r \left(\frac{\sigma_T}{E_T(r)} - \mu_R \frac{\sigma_R}{E_R(r)} \right) \quad (36)$$

Siirtymä w voidaan eliminoida yhtälöistä derivoimalla yllä oleva yhtälö säteen suhteen ja asettamalla näin saatu yhtälö yhtä suureksi kaavan 35 kanssa. Rullausmallin differentiaaliyhtälö ei riipu tangentialisen kimmokertoimen E_T derivaatoista, joten sitä voidaan käsitellä vakiona. Saatu yhtälö yksinkertaistetaan ja ratkaistaan tangentialisen jännityksen suhteen.

$$\sigma_T' = \frac{E_R E_T \sigma_R + \mu_R E_R E_T \sigma_R - E_R^2 \sigma_T - \mu_T E_R^2 \sigma_T - r \mu_R E_T E_R' \sigma_R + r \mu_R E_R E_T \sigma_R'}{r E_R^2} \quad (37)$$

Tangentialisuuntaisen jännityksen derivaatta voidaan eliminoida ratkaisemalla tasapainoyhtälö tangentialisen jännityksen suhteen, derivoimalla se sekä asettamalla se yhtä suureksi edellisen yhtälön kanssa. Saadusta yhtälöstä voidaan ratkaista tangentialisuuntaisen jännitys radiaalisuuntaisen jännityksen ja materiaalivekioiden funktiona.

$$\sigma_T = \frac{E_R E_T \sigma_R + \mu_R E_R E_T \sigma_R - r \mu_R E_T E_R' \sigma_R + r \mu_R E_R E_T \sigma_R' - 2r E_R^2 \sigma_R' - r^2 E_R^2 \sigma_R''}{(1 + \mu_T) E_R^2} \quad (38)$$

Saatu yhtälö voidaan sijoittaa tasapainoyhtälöön, jolloin differentiaaliyhtälö voidaan sieventää standardimuotoiseksi.

$$r^2 \frac{d^2 r \sigma_R}{dr^2} + A r \frac{d \sigma_R}{dr} + B \sigma_R = 0, \quad (39)$$

$$\text{jossa } A = \left(3 + \mu_T - \mu_R \frac{E_T}{E_R} \right) \text{ ja}$$

$$B = \left(\frac{-(1 + \mu_R) E_R E_T + (1 + \mu_T) E_R^2 + r \mu_R E_T \frac{dE_R}{dr}}{E_R^2} \right)$$

Reunaehdot hylsyn ja rullan pinnalla voidaan johtaa tasapainoyhtälön, tangentialisen jännitys-venymä-ehdon sekä hylsyjäykkyyden muodostaman yhtälöryhmän avulla eliminoimalla tangentialiset jännitykset sekä venymät.

$$\frac{d \sigma_R}{dr} = \sigma_{R_0} \frac{-E_C E_R + E_R E_T + \mu_R E_C E_T}{r E_C E_T} \quad (40)$$

$$\sigma_R = \frac{-WIT}{r_n} \quad (41)$$

Yllä johdetun differentiaaliyhtälön sekä reunaehtojen ainoa ratkaisutapa on numeerinen analyysi esimerkiksi numeeristen derivaattojen avulla. Tällöin jokainen kerros tulee laskea erikseen ja koota lasketut kerrokset matriisiin, josta saadaan jännitys jakauma rullan säteen funktiona.

KANTOTELALEIKKURIN STAATTINEN MALLINTAMINEN

1.9. Rullan täyttyminen

Tarkastellaan rullan täyttymistä parametrinen ajan T funktiona. Paperin massavirta rullalle on

$$\dot{m} = \rho w b v \quad (42)$$

missä ρ on paperin tiheys, w rainan leveys, b rainan paksuus sekä v koneen ajonopeus.

Paperirullan tilavuudeksi saadaan ajan hetkellä T

$$V = \frac{1}{\rho} \int_0^T \dot{m} dt = b v w T \quad (43)$$

Jos paperirulla on kasvanut tyhjän rullaintelan säteestä R_{min} arvoon R on tilavuus myös

$$V = \pi w (R^2 - R_{min}^2) \quad (44)$$

Lausekkeita (43) ja (44) vertaamalla saadaan rullan ulkosäde ratkaistua muodossa

$$R(T) = \sqrt{\frac{\mu \rho^{-1} v T + \pi R_{min}^2}{\pi}} \quad (45)$$

missä $\mu = b \rho$ on paperin neliömassa.

1.10. Viivakuormituksen ohjaus

Rullan halkaisijan kasvaessa rullaan aiheutuva painovoima voidaan esittää ulkosäteen funktiona .

$$G(R) = m_l g + \rho V(R) g = m_l g + \rho \pi w [R(T)^2 - R_{\min}^2] g \quad (46)$$

Kantotelaleikkauksessa syntyvän rullan halkaisijamuutos muuttaa kannattelukulmaa ϕ . Kannattelukulma ϕ on syntyvän rullan ja kantotelan yhteistä tangenttia kohtisuoraan olevan suoran ja pystysuunnan välinen kulma.

$$\sin \phi = \frac{d + s}{2R + d} \quad (47)$$

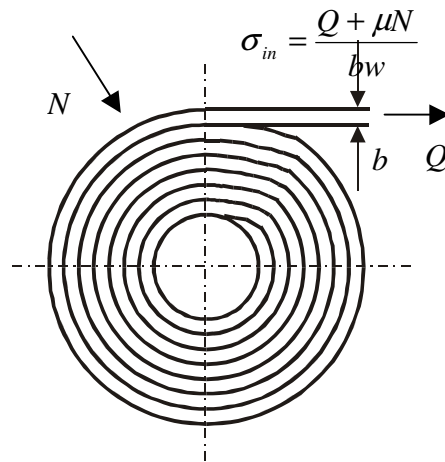
Kannattelukulman muutos vaikuttaa kokonaisnippivoimaan $N(R)$.

$$N(R) = \frac{G(R) + F(R)}{2 \cos \phi} \quad (48)$$

missä d =kantotelan halkaisija, s =kantotelojen etäisyys, $F(R)$ =painotelan voima

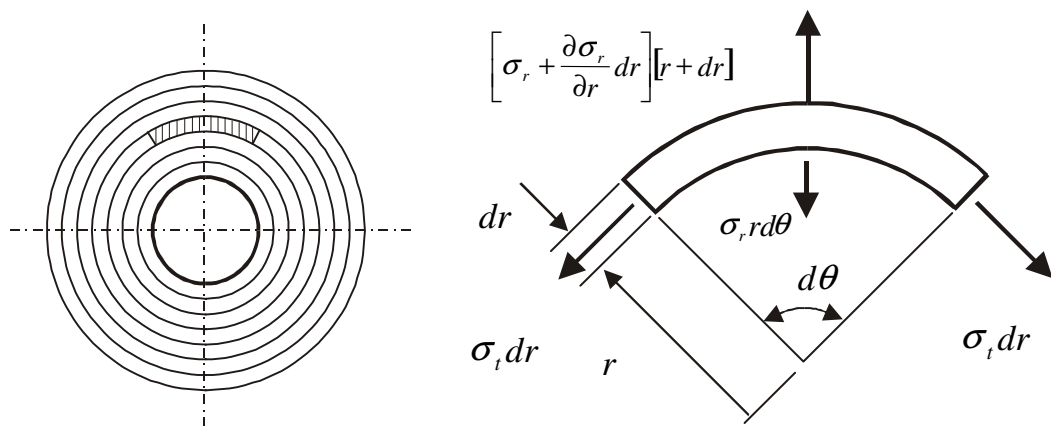
1.11. Rullan jännitystila

Rullan jännitystila riippuu kumulatiivisesti koko paperin rullaushistoriasta. Rullaushistorialla tarkoitetaan rullaan ajettavan rainan radansuuntaisen sisäänmenojännityksen σ_{in} riippuvuutta ajasta tai rullan ulkosäteen R kasvusta.



Kuva 9. Paperin sisäänmenojännityksen määrittely.

Paperirullaan syntyy rullauksen aikana jännitystila, joka sisältää säteettäisen σ_r ja kehänsuuntaisen σ_t jännityskomponentin (kuva 9).



Kuva 10. Paperirullan sisäisen jännitystilan komponentit.

Altmann on ratkaissut rullan säteissiirtymän differentiaaliyhtälöstä täyden R_{max} -säteisen rullan muodonmuutokset ja johtanut niistä jännityskomponenteille lausekkeet

$$\begin{aligned}
\sigma_r(\hat{r}) &= -\frac{I + a\hat{r}^{-2\gamma}}{\hat{r}^{l-a}} I(\hat{r}) \\
\sigma_t(\hat{r}) &= \sigma_{in}(\hat{r}) - \frac{\gamma - \delta - a(\gamma + \delta)\hat{r}^{-2\gamma}}{\hat{r}^{l-a}} I(\hat{r})
\end{aligned} \tag{49}$$

missä kumulatiivinen rullausintegraali on

$$I(\hat{r}) = \int_{\hat{r}}^{\hat{R}_{\max}} \frac{\hat{R}^{l-a}}{I + a\hat{R}^{-2\gamma}} \frac{\sigma_{in}(\hat{R})}{\hat{R}} d\hat{R} \tag{50}$$

Kaavoissa esiintyvät dimensiottomat muuttujat on muodostettu tyhjän rullaintelan ulkosäteen avulla

$$\hat{r} = \frac{r}{R_{\min}} \quad ; \quad \hat{R} = \frac{R}{R_{\min}} \quad ; \quad \hat{R}_{\max} = \frac{R_{\max}}{R_{\min}} \tag{51}$$

Muut apusuureet on johdettu rullan säteettäisten ja kehänsuuntaisten kimmomodulien E_r , E_t ja suppeumalukujen ν_r , ν_t suuruussuhteista

$$\begin{aligned}
\nu &= \frac{I}{2} \left(\nu_t + \frac{E_t}{E_r} \nu_r \right) \\
\delta &= \frac{I}{2} \left(\nu_t - \frac{E_t}{E_r} \nu_r \right) \\
\gamma &= \sqrt{\delta^2 + \frac{E_t}{E_r}} \\
a &= \frac{\gamma - \nu}{\gamma + \nu}
\end{aligned} \tag{52}$$

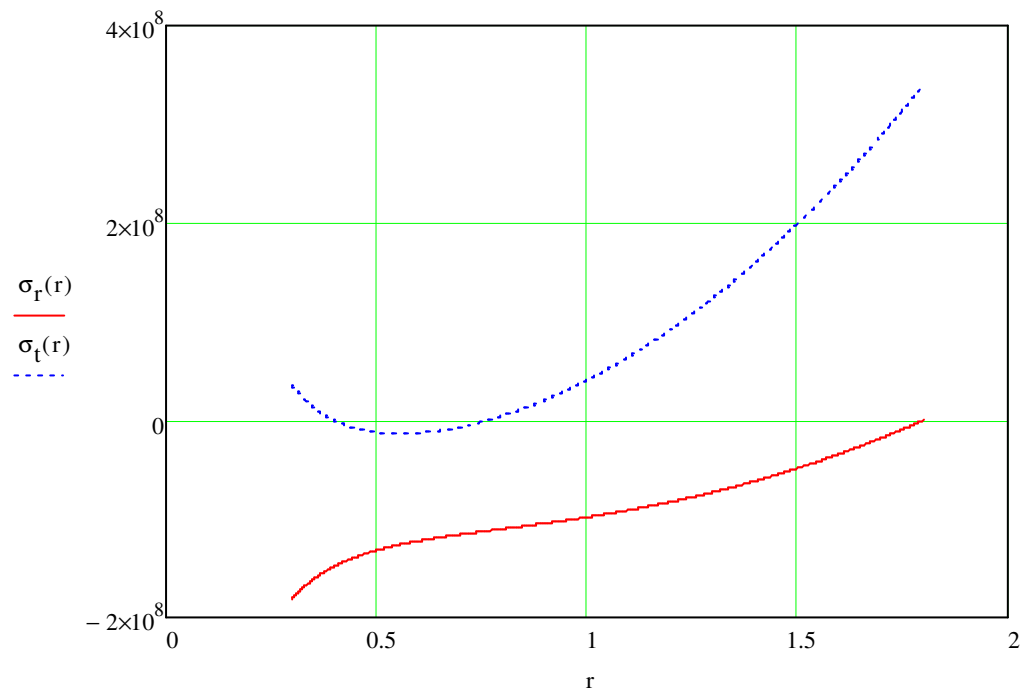
Edellä esitettyjen kaavojen käyttäminen rullaan syntyneen jännitystilän laskemiseksi onnistuu mikäli sisäänmenoajännitys σ_{in} tunnetaan rullan kasvusäteen R funktiona. Sisäänmenoajännitys riippuu nippikuormasta $N(R)$ sekä radan nippiä edeltävästä kiristyksestä Q .

Approksimoimme riippuvuutta muodossa

$$\sigma_{in}(R) = \frac{Q + \mu N(R)}{wb} \quad (53)$$

missä empiirinen kerroin μ sovitetaan paperin eri kerrosten välisen liukukitkan kertoimeen.

Alla oleva kuva 11 esittää tangentialis- ja radiaalissuuntaiset jännitykset säteen funktiona. Laskenta on esitetty yksityiskohtaisesti liitteessä 1 olevassa mathcad-koodissa.



Kuva 11: Jännitykset säteen funktiona

MATERIAALIOMINAISUUKSIEN MUUTTUMINEN RULLAUKSESSA

Korkean nippipaineen aiheuttamat ongelmat rullauksessa ovat tunnettu, mutta erittäin vähän tutkittu tieteenala. Ongelmat ovat kuitenkin tilastollisesti harvinaisia ja materiaalien romahdusteoriat monimutkaisia. Ohuiden ja liukkaampien materiaalien lisääntyminen kasvattaa nippipaineesta aiheutuvia ongelmia huomattavasti. Kaikkien liiallisesta nippipaineesta johtuvien ongelmien perusmekanismi on yhtäläinen, joten ratkaisumallitkin ovat samankaltaisia. [5, s. 141]

Korkea nippipaine voi aiheuttaa herkille materiaaleille ongelmia liiallisen puristuspuheen johdosta. Huippupaineen pienentäminen edesauttaa ongelmien poistumista, mutta vähentää kuitenkin rullan kireyttä. Rullan kireyden pienentyminen pehmentää rullia, mikä taas johtaa nipin levenemiseen ja sitä kautta alentaa painetta entisestään. [5, s. 141]

1.12. Ongelmien muodostumismekanismit

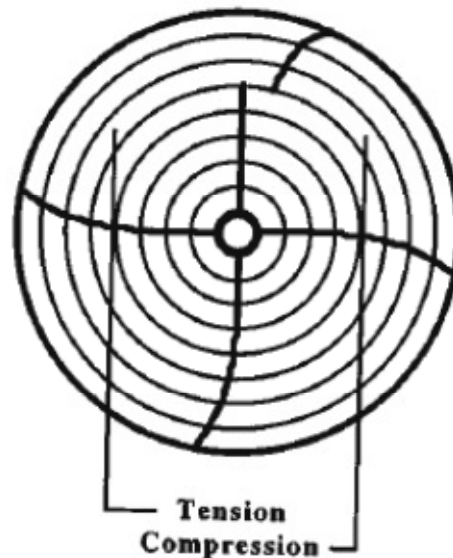
Rainaan kohdistuu rullan sisällä multiaksaalinen jännitys jakauma. Kaikki rullausongelmat johtuvat pääasiallisesti liiallisesta tangentiaalisuuntaisesta jännityksestä tai puristuksesta sekä tangentiaalisuuntaisista leikkausvoimista. Tangentiaalisuuntaisen vedon tapauksessa materiaalin venymäkyky ylittyy ja se lopulta repeää. Tällaiset ongelmat ilmenevät halkeamina rullan ulkopinnalla. Tangentiaalisen puristuksen aiheuttamat ongelmat ilmenevät yleensä rullan sisemmissä kerroksissa. Leikkausvoimat johtuvat rainan epätasaisesta kuormituksesta poikkisuunnassa, jolloin rullaan syntyy vanoja tai raina jopa repeää keskeltä. [5, s. 142]

1.13. Epätasainen liukuminen ja pinnan muuttuminen

Rainan kerrosten välinen liukuminen ei yleensä aiheuta ongelmia, jos se on tasaista ja pientä. Ongelmallista on kuitenkin se, että kerrosten välinen liukuminen on useimmissa tapauksissa epätasaista. Liukumisen epätasaisuus johtuu kolmesta eri syystä. Ensimmäinen syy on se, että se kerros, jolla on pienin kitkakerroin, liukuu ensimmäisenä ja eniten vapauttaen jännityksiä rullan sisältä entisestään. Toiseksi, staattinen kitkakerroin on kartongilla korkeampi kuin dynaaminen kitkakerros, joten se kerros, joka aloittaa liukumisen, voi liukua muita kerroksia huomattavasti enemmän. Kolmas syy epätasaiseen liukumiseen, johtuu itse liukumisesta. Liukumisen vuoksi

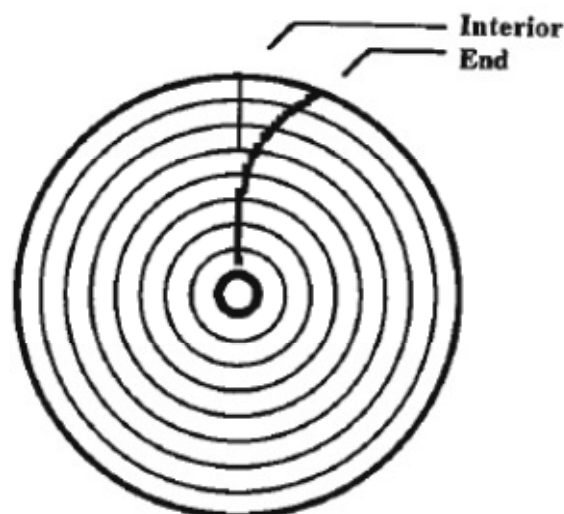
kartongin pinnan pienet epätasaisuudet tasoittuvat ja muotoutuvat uudelleen pienentäen kerrosten välisiä kitkakertoimia. [5, s. 143]

Liukumista voidaan mitata ns. J-linja-testillä, jossa rullan päähän ammutaan suora viiva. Rullauksen aikana viivan kääntyminen tarkoittaa kerrosten välistä liukumista. Alla olevissa kuvissa (kuvat 12 ja 13) on esitelty kaksi erilaista liukumismekanismeja J-linjojen avulla.



Kuva 12: Radiaalissuunnassa tapahtuva epätasainen liukuminen [5, s. 143]

Ensimmäinen tapaus (kuva 12) esittää epätasaisesta puristusjännityksestä johtuvaa säteissuunnassa epätasaisista liukumista. Toinen tapaus (kuva 13) on rullan poikkisuunnassa olevaa epätasaisista liukumista, joka johtuu leikkausvoimista radan poikkisuunnassa sekä epätasaisesta poikkisuuntaisesta profiilista. [5, s. 143]



Kuva 13: Poikkisuunnassa tapahtuva epätasainen liukuminen [5, s. 143]

Kerrosten väliseen liukumiseen vaikuttaa suuresti rullattavan materiaalin kitkakertoimet. Kartongin tapauksessa päällystyskerroksien paksuudet ja materiaalit ovat avainasemassa kitkakertoimia määritettäessä. Muutokset päällystyspastoihin ja päällystys/kuivatus-parametreihin vaikuttavat rullaustuloksen onnistumiseen ja sitä kautta lopulliseen pinnan laatuun ja ulkonäköön. Kartongin fyysinen profiili eli paksuus vaikuttaa rullaustapahtumaan, mutta usein nämä vaatimukset ovat asiakkaalta lähtöisin, eikä niitä näin ollen voi muuttaa.

Taivekartonki on monikerroksinen materiaali. Jos materiaalin kerrosten väliset sidokset ovat voimankestoltaan heikompia kuin liukumista estävät kitkavoimat, irtoavat materiaalin kerrokset toisistaan ja tapahtuu ns. delaminointuminen. Ongelman ratkaisu on nippipaineen pienentäminen, sillä kitkavoima on suoraan verrannollinen pinnan normaalivoimaan eli tässä tapauksessa radiaalissuuntaiseen nippivoimaan.

1.14. Paksuuden ja bulkin muutos sekä niiden aikariippuvuus

Radiaalissuuntaisen puristuksen noustessa suureksi on vaarana, että rullattavan materiaalin paksuus pienenee lopullisesti. Paksuuden muutos on helppo havaita, sillä rullauksesta materiaaliin kohdistuvat voimat pienentävät aina paksuutta. Puristusaika vaikuttaa puristusvoiman ohella siihen, kuinka suuri paksuuden muutos materiaalilla tapahtuu. Rullatun materiaalin paksuuden vaihtelu kuvastaa radiaalissuuntaisen jännityksen jakaumaa rullan sisällä. Materiaalin muutkin ominaisuudet vaihtelevat jännitysjauman mukaisesti. [5, s. 114]

Materiaalin herkkyyttä puristuskorjaukselle voi estimoida määrittämällä pinotesteillä eri puristuskorjauksen ja paksuuden muutoksen yhtenevyyksiä. Pinotesteissä on hyvä huomioida puristusajan vaikutus, sillä puristusaika ja paksuuden muutos korreloivat lineaarisesti keskenään. [5, s. 114]

Aiemmissa kappaleissa esiteltyjen rullausmallien mukaisesti rullausparametrien vaikutus rullan sisäisiin jännitysjaumiin on erittäin monimutkainen ja usein yhden parametrin muutos vaikuttaa useisiin muihin muuttujiin. Jos rullauksessa tapahtuva paksuuden tai bulkin menetys on liian suuri, voi vaikutusta yrittää pienentää rullauksen ns. TNT-parametreja muuttamalla. Merkittävät muutokset eivät kuitenkaan ole yleensä mahdollisia, sillä rullausparametrit ovat sidottuja leikkurin konstruktion sekä kapasiteettiin. Vaikka jännitysjaumaltaan sopiva rulla olisi teoreettisesti mahdollista rullata tietyn tyyppisellä leikkurilla, on se usein tuotantotaloudellisesti kestänytöntä.

MATERIAALIOMINAISUUKSIEN EMPIIRINEN TUTKIMINEN

Materiaaliominaisuuksien muuttumisen tutkiminen on haastavaa. Valmis rulla on avattava ja materiaaliominaisuudet on mitattava useasta eri kohdasta. Tällaisessa mittaustavassa tutkittavaa rullaa ei voi enää hyödyntää jatkokäyttöön muuten kuin materiaalina uuden paperimassan valmistuksessa.

Mitattavia materiaaliominaisuuksia on verrattava ennen rullausta mitattuihin arvoihin, jotta rullauksen aiheuttamat muutokset voitaisiin saada esille. Materiaaliominaisuudet kuitenkin muuttuvat koko ajan, sillä valmis kartonki ei ole täysin homogeenistä. Jatkuvasti vaihtelevan mittausdatan kohdistaminen tiettyyn kohtaan rullaa on haastavaa. Tutkimusten yksinkertaistamiseksi kartongin ominaisuuksien oletetaan olevan vakioita ennen rullausta.

1.15. Mitattavat materiaaliominaisuudet ja mittausten suoritustapa

Kartongin materiaaliomaisuudet mitattiin Metsä Board Takon kartonkilaboratoriossa. Mitattavia suureita olivat tehtaan tuotantoprosessissa yleisesti tarkkaillut suureet mm. paksuus, PPS, kiilto, Taber15° KS, Taber15° PS ja OptiTopo. Rullat valittiin hylätyistä kartonkieristä siten, ettei hylkäyssyy vaikuta mittausten todenperäisyyteen. Mittausta varten rullat avattiin käsin kerros kerrokselta ja kartonkinäytteet kerättiin tietyin etäisyyksin.

1.16. Mittaus 1 – eri ratapaikat, sama muutto

Konerullan numero 41100649

Rullanumerot 4500932139

Muutto 1 Rata 3

4500932140

Muutto 1 Rata 4

Taulukko 1 : Yhteenveto mittaustuloksista

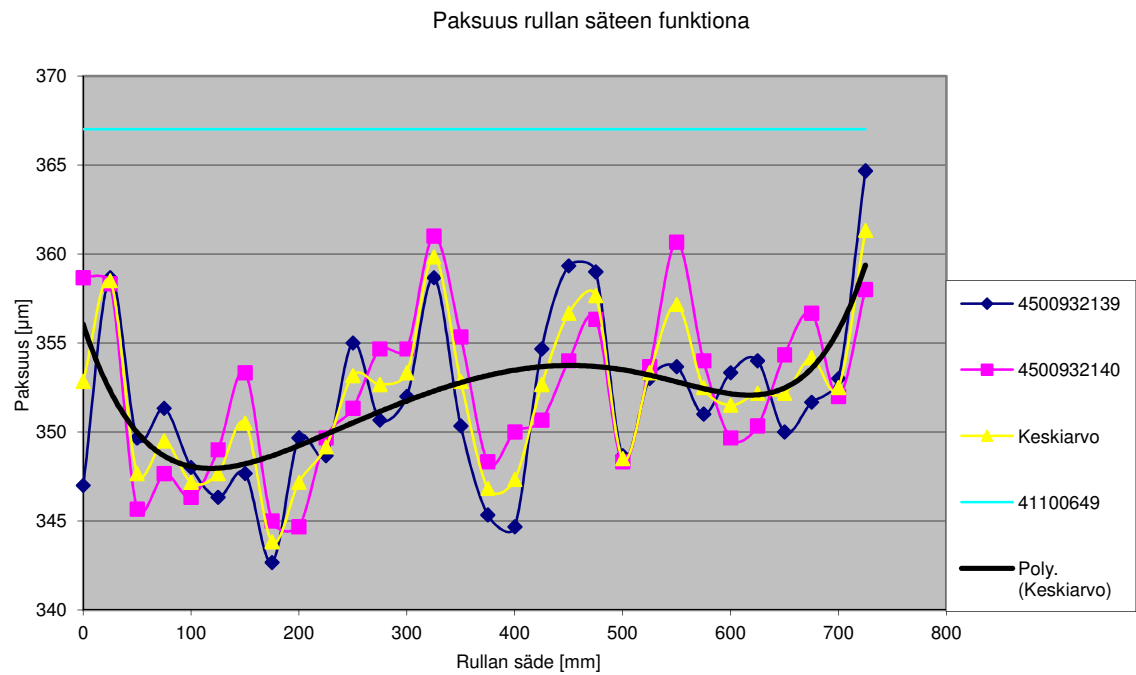
Näytekohta	Paksuus	PPS	Kiilto	Taber15° KS	Taber15° PS	OptiTopo
	[μm]	[μm]	[%]	[mNm]	[mNm]	[%]
41100649	367	0,73	54,0	11,3	5,3	1,9

4500932139						
KA	352	0,75	58,8	11,0	5,1	2,6
Max	365	0,82	65,6	11,8	5,4	3,7
Min	343	0,70	55,1	10,3	4,8	1,6

4500932140						
KA	352	0,77	58,3	11,1	5,0	2,9
Max	345	0,82	63,3	11,7	5,3	4,2
Min	361	0,70	55,7	10,6	4,4	2,0

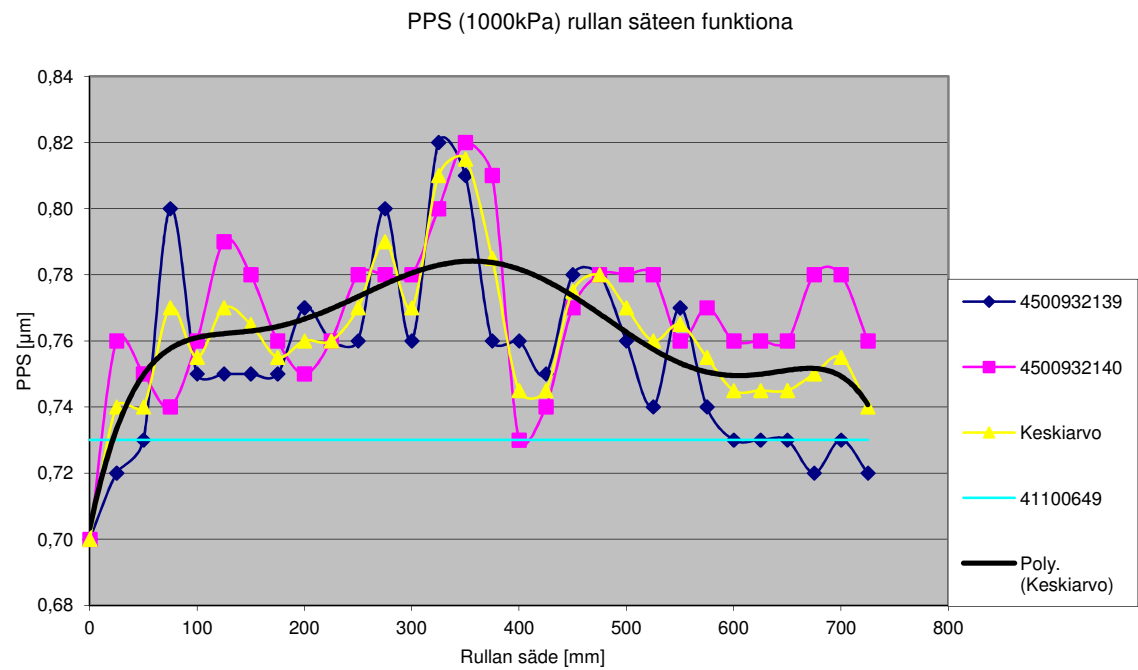
Mittaustapahtumassa tutkittiin eri ratapaikkojen vaikutusta rullissa tapahtuviin materiaaliominaisuuksien muutoksiin. Havainnoista käy ilmi, ettei ratapaikoilla ole merkitystä rullauksen aiheuttamiin muutoksiin.

1.16.1. Paksuus



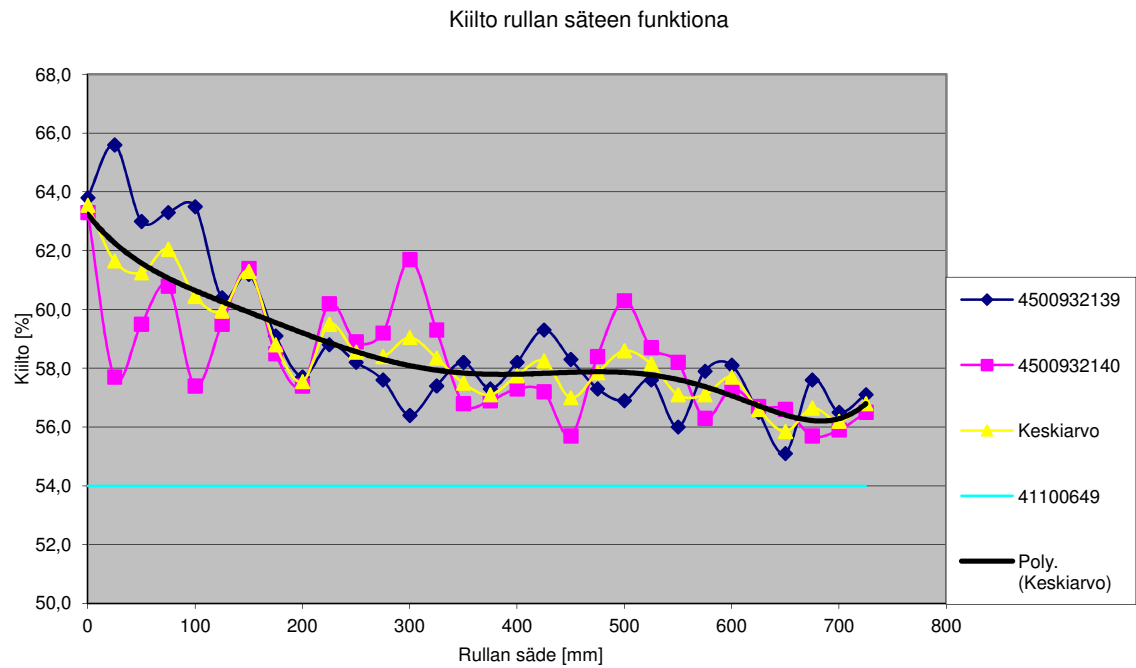
Paksuus muuttuu rullan säteen kasvaessa, mutta muutoksella ei ole havaittavissa tasaista trendiä. Paksuus putoaa merkittävästi nippikuorman kasvaessa rullan halkaisijan funktiona.

1.16.2. PPS



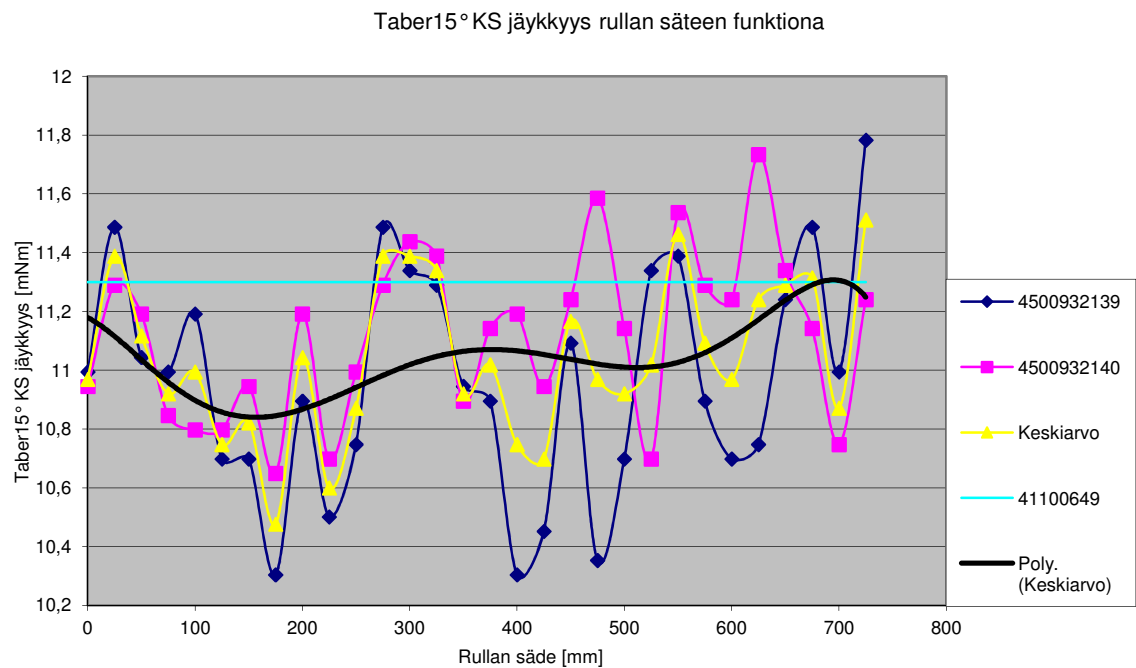
Pinnan sileyttä kuvaavan PPS-profiilin muutokset eivät näytä muuttuvan merkittävästi rullan sisällä.

1.16.3. Kiilto



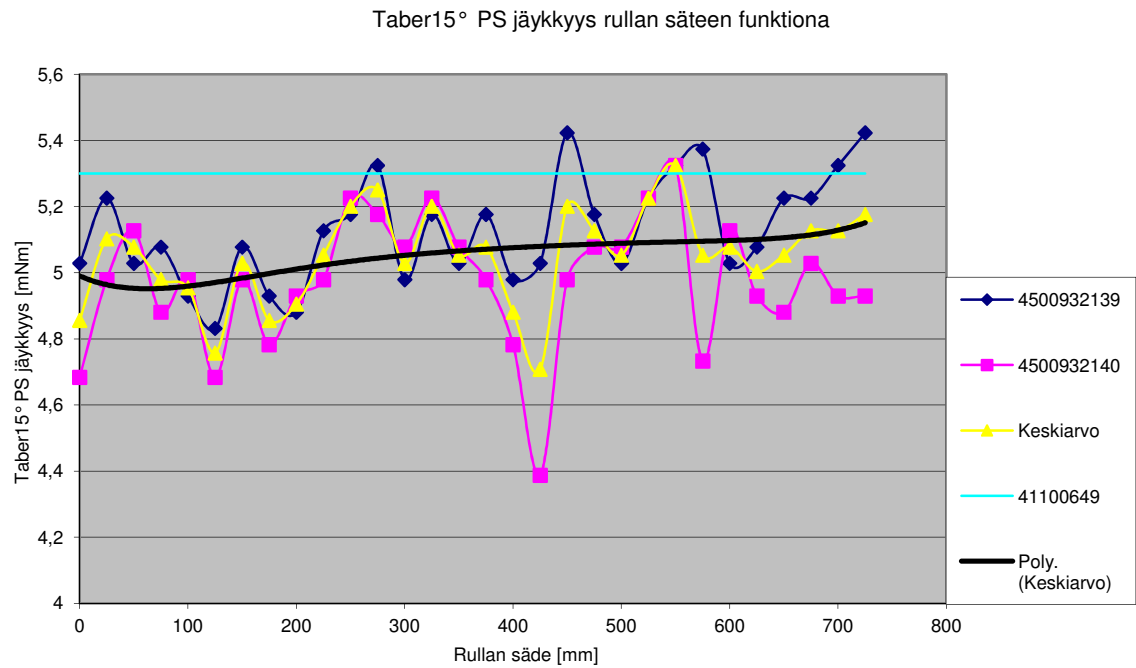
Kiilto kasvaa huomattavasti rullan sisällä olevan hylsyn pintaan tullessa. Rullauksessa vaikuttavat tangentiaalisuuntaiset jännitykset aiheuttavat jälkikiillottumista.

1.16.4. Taber15° KS



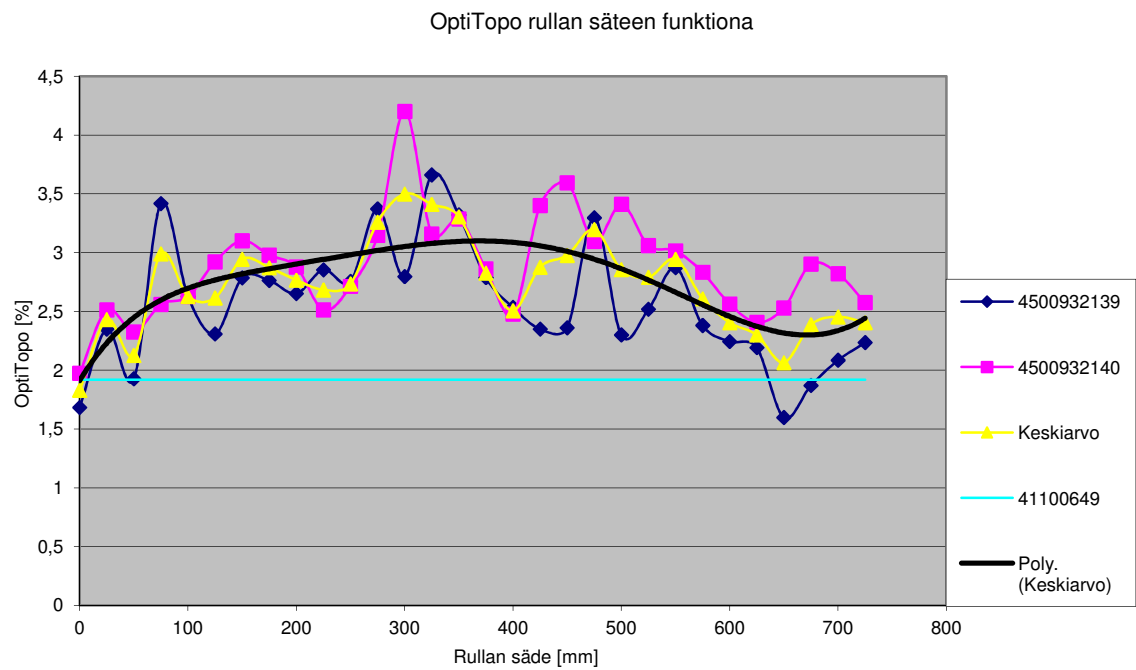
Taber-jäykkyys 15 asteen mittauskulmalla konesuuntaisesta tasosta näyttää korreloivan paksuuden muutoksen kanssa.

1.16.5. Taber15° PS



Taber-jäykkyys 15 asteen mittauskulmalla poikkisuuntaisesta tasosta ei näytä korreloivan rullan halkaisijan kanssa.

1.16.6. OptiTopo



OptiTopo-arvo kuvaa pinnan painokelpoisuutta ja se noudattelee pintaprofiilin PPS-arvon muutoksia.

1.17. Mittaus 2 – eri muutot, sama ratapaikka

Konerullan numero 41100649

Rullanumerot 4500932139

Muutto 1 Rata 3

4500932143

Muutto 2 Rata 3

Taulukko 2 : Yhteenveto mittaustuloksista

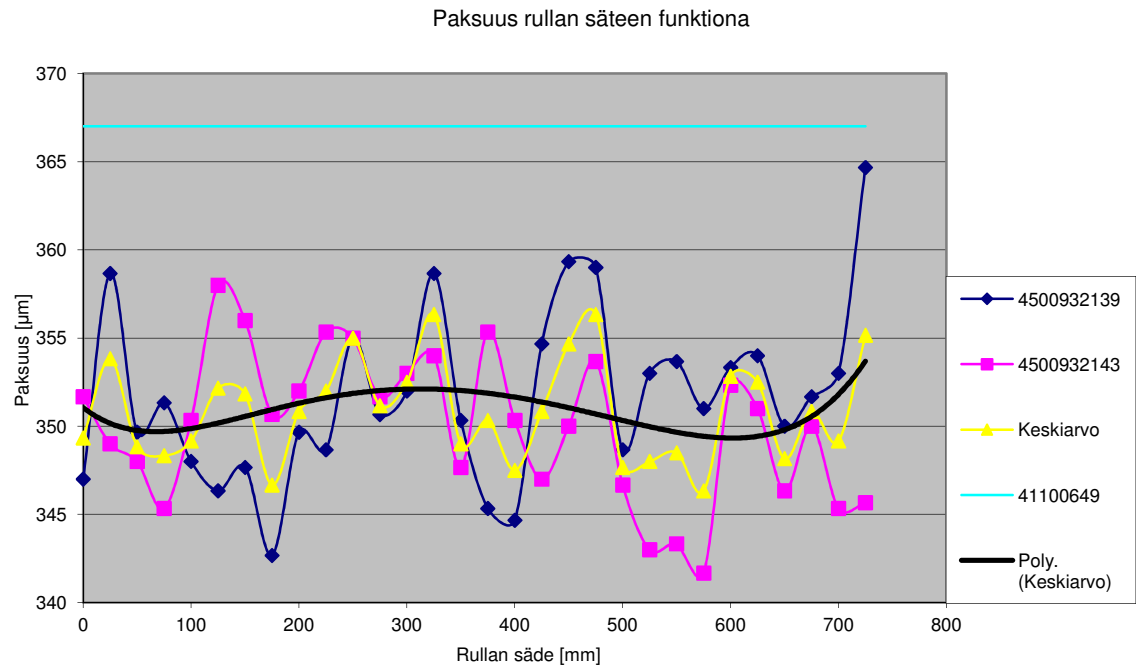
Näytekohta	Paksuus	PPS	Kiilto	Taber15° KS	Taber15° PS	OptiTopo
	[μm]	[μm]	[%]	[mNm]	[mNm]	[%]
41100649	367	0,73	54,0	11,3	5,3	1,9

4500932139						
KA	352	0,75	58,8	11,0	5,1	2,6
Max	365	0,82	65,6	11,8	5,4	3,7
Min	343	0,70	55,1	10,3	4,8	1,6

4500932143						
KA	350	0,76	59,7	10,6	5,1	2,6
Max	342	0,80	66,7	11,3	5,4	3,4
Min	358	0,73	55,7	9,9	4,8	1,7

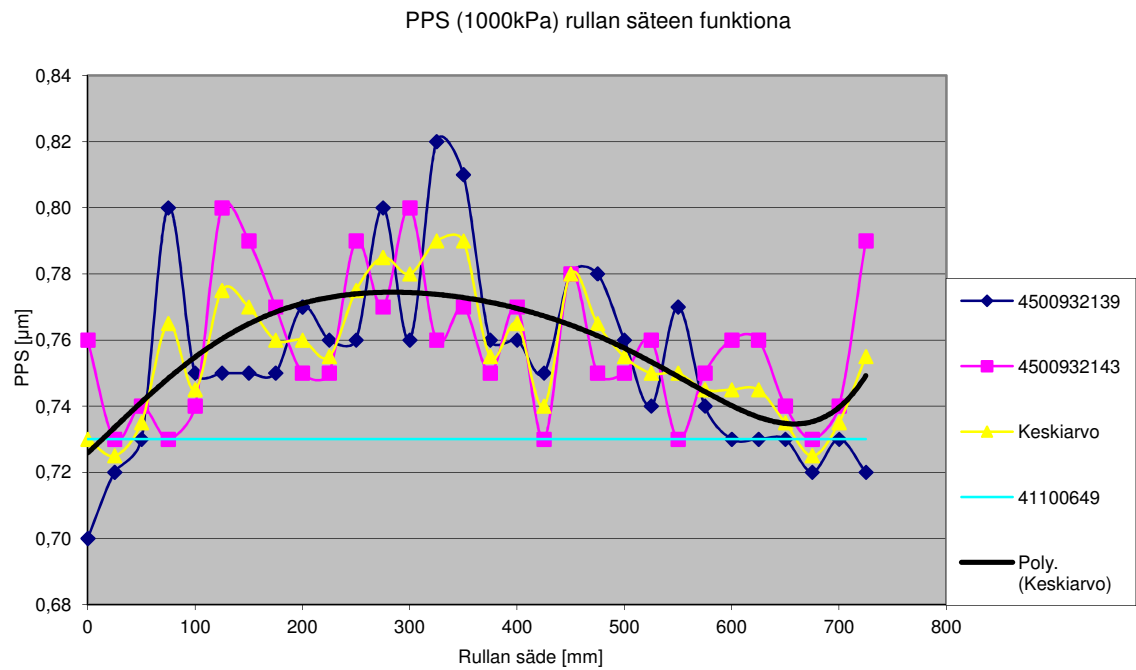
Mittaustapahtumassa tutkittiin eri muuttojen eli leikkauskertojen vaikutusta rullissa tapahtuviin materiaaliominaisuuksien muutoksiin. Ratapaikka on kummassakin mittauksessa sama. Havainnoista käy ilmi, ettei muutoilla ole merkitystä rullauksen aiheuttamiin muutoksiin.

1.17.1. Paksuus



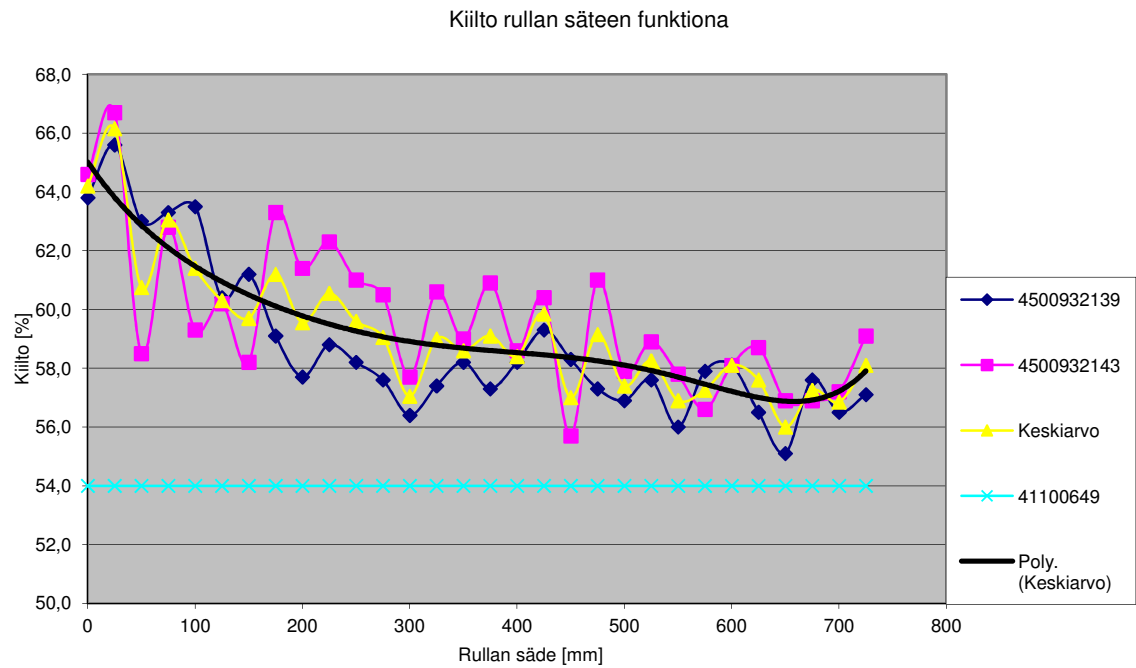
Paksuus muuttuu rullan säteen kasvaessa, mutta muutoksella ei ole havaittavissa tasaista trendiä. Paksuus putoaa merkittävästi nippikuorman kasvaessa rullan halkaisijan funktiona.

1.17.2. PPS



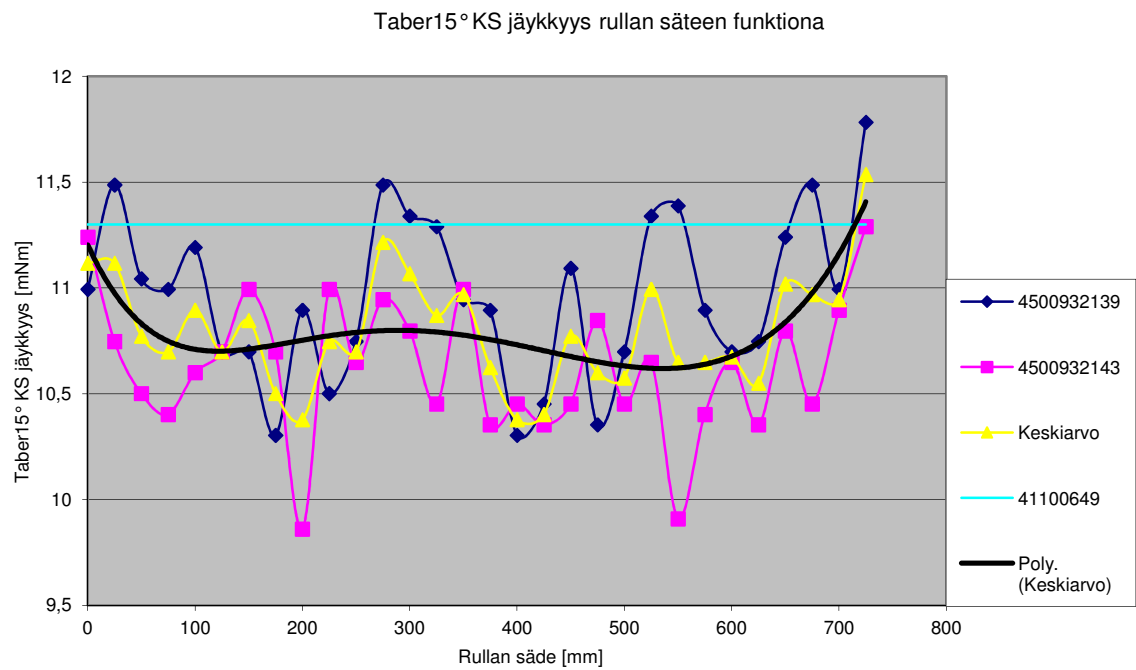
Pinnan sileyttä kuvaavan PPS-profiilin muutokset eivät näytä muuttuvan merkittävästi rullan sisällä.

1.17.3. Kiilto



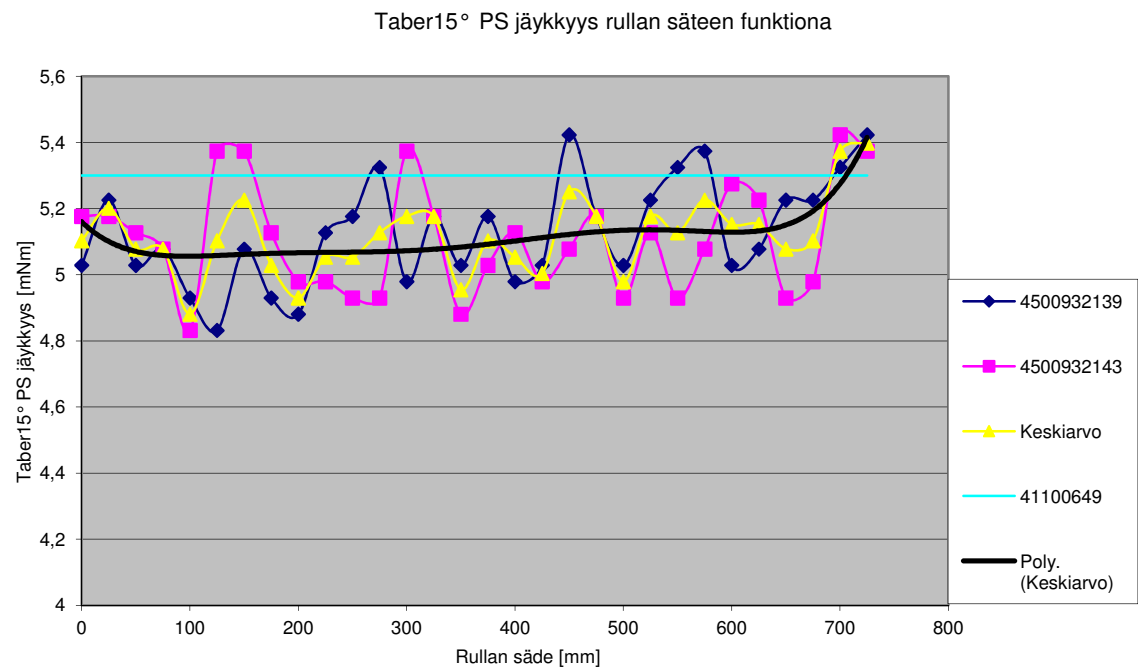
Kiillossa muutos tapahtuu rullan säteen kasvaessa. Tämä johtune tangentiallissuuntaisen kireyden aiheuttamasta luistosta.

1.17.4. Taber15° KS



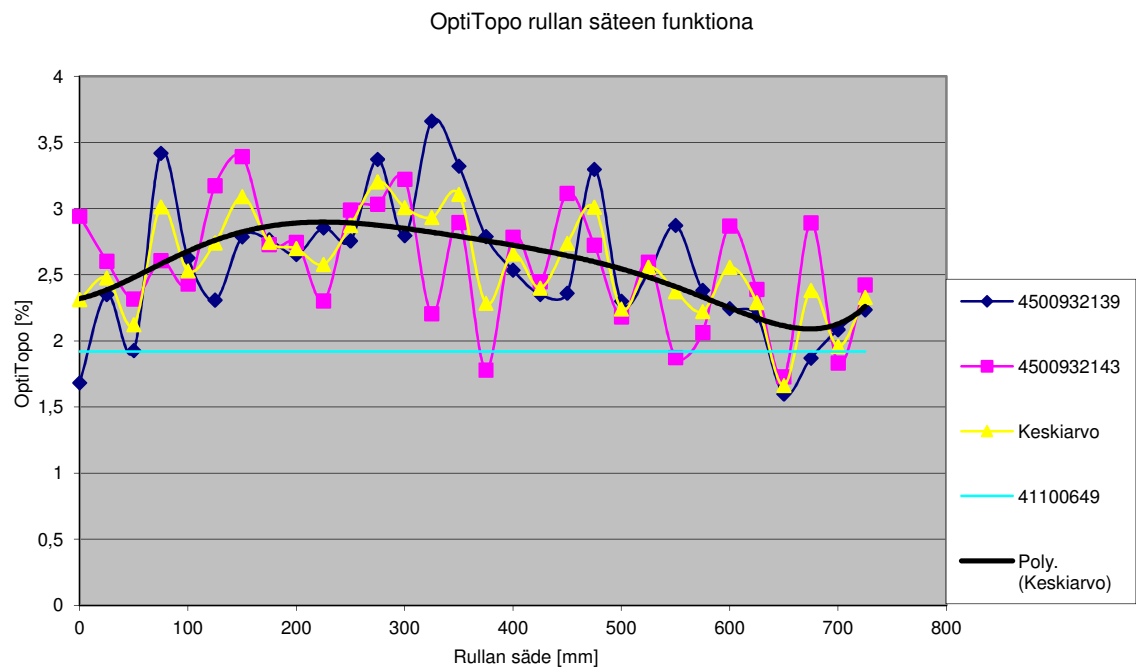
Konesuuntainen jäykkyys ei näytä vaihtelevan rullan sisällä.

1.17.5. Taber15° PS



Poikkisuuntainen jäykkyys ei näytä vaihtelevan rullan sisällä.

1.17.6. OptiTopo



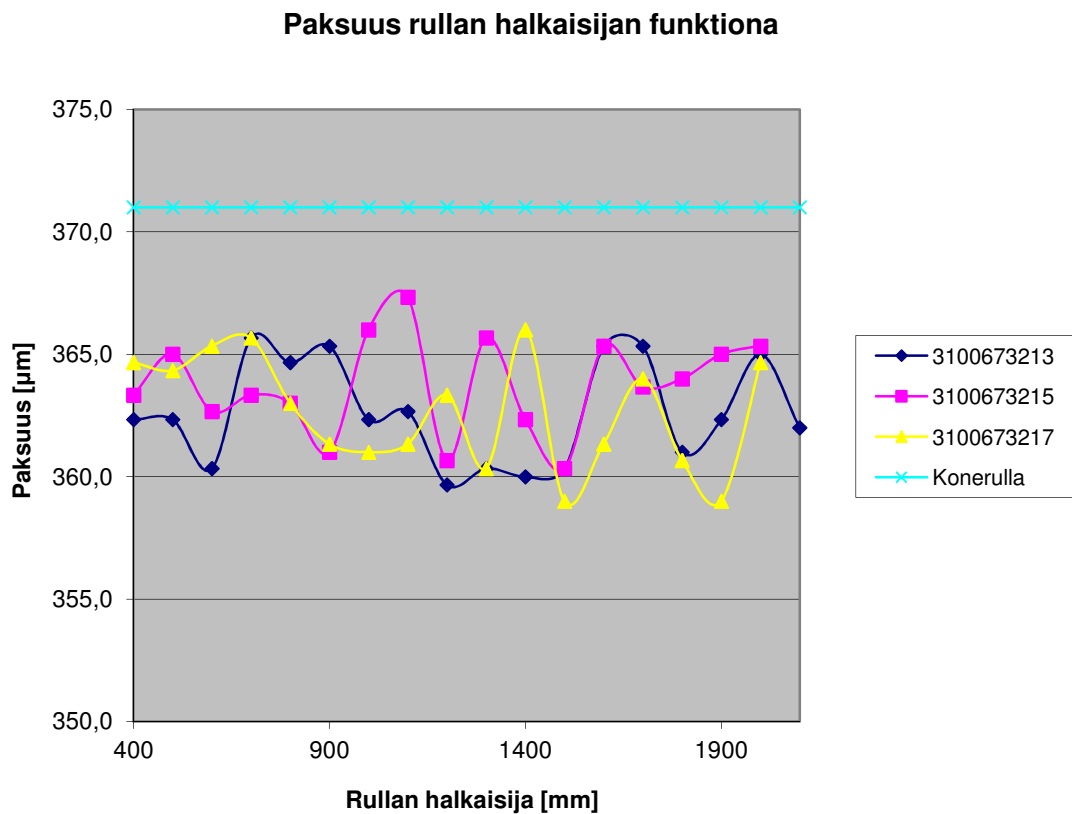
OptiTopo-arvo noudattelee pintaprofiilin PPS-arvoja.

1.18. Mittaus 3 – WinBelt-tyyppinen leikkuri

Konerullan numero -
 Rullanumerot 3100673213
 3100673215
 3100673217

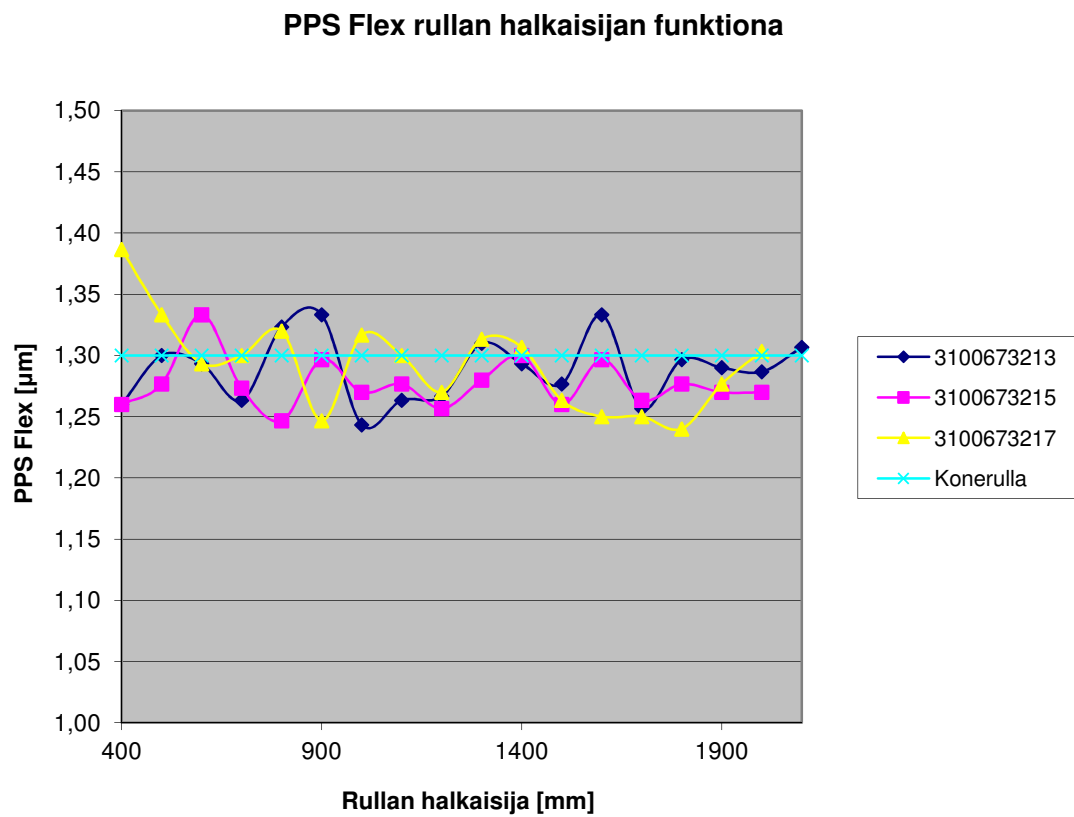
Mittaustapahtumassa tutkittiin WinBelt-tyyppisen hihnakannatteisen leikkurin eri ratapaikoilta tulevia rullia. Leikkurissa toinen kantoteloista on korvattu nippikuorman pienentämiseksi hihnalla.

1.18.1. Paksuus



Paksuuden muutos on tasaisen rullan halkaisijasta riippumatta. Paksuuden pienentymä voi johtua sekä pituusleikkauksen rullauksesta että konerullan rullauksesta.

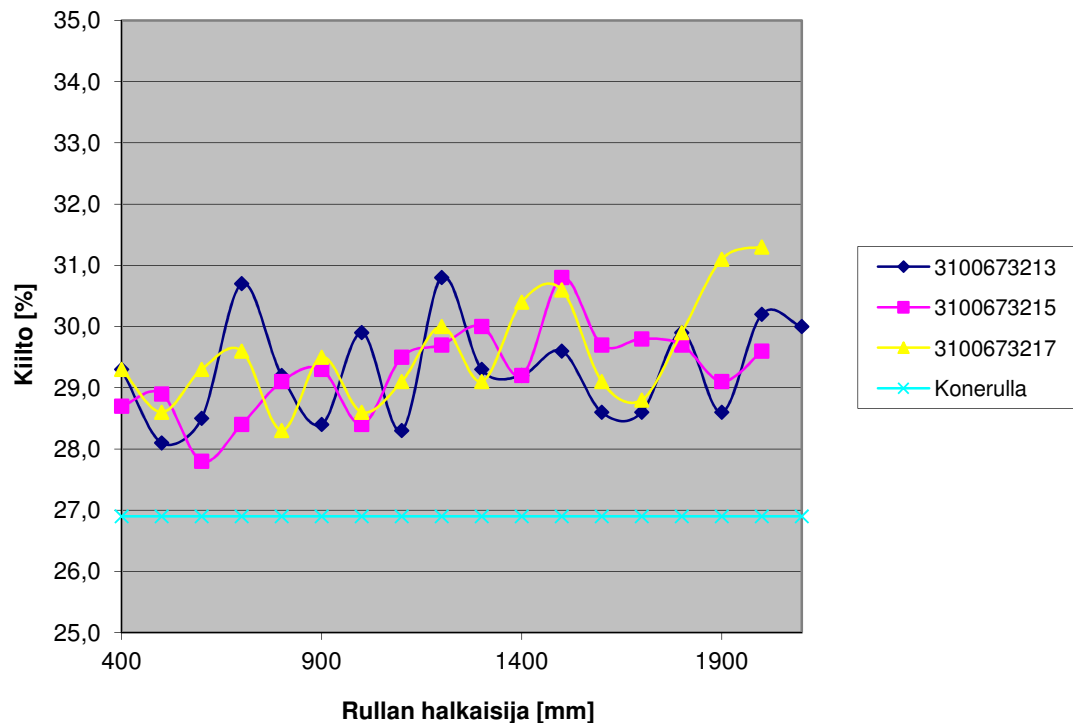
1.18.2. PPS Flex



Pintaprofiilissa ei ole merkittävää vaihtelua rullan halkaisijan funktiona.

1.18.3. Kiilto

Kiilto rullan halkaisijan funktiona



Kiilto ei nouse merkittävästi rullan halkaisijan muuttuessa, mikä osoittaa tangentiaalissuuntaisen kireyden olevan tasaista.

1.19. Johtopäätökset empiirisen tutkimuksen jälkeen

Pituusleikkurin rakenne näyttää empiiristen rullatutkimusten jälkeen olevan suurin syy rullien sisällä oleviin materiaaliominaisuuksien muutoksiin. Leikkurirakenteesta johtuen kantotelojen aiheuttamat nippivoiman ja ratakireyden kasvu aiheuttavat sekä paksuuden menetystä että kiillon kasvua. Kiillon kasvu johtuu pintojen luistamisesta rullan sisällä.

Tutkittaessa WinBelt-tyyppisen leikkurin rullia, voidaan havaita nippivoiman aiheuttamat muutokset rullissa, mutta ne ovat huomattavasti pienempiä kuin konventionaalisessa kaksoisteleikkurissa (WinDrum). Rullien tutkiminen on työlästä ja aiheuttaa rullan menetyksen jatkojalostuskäytöstä, joten mitattavien rullien määrä jouduttiin pitämään pienenä tuotantotaloudellisista syistä.

Tutkimus antaa valmiudet jatkaa rullauksen aiheuttamien muutosten arviointia tulevaisuudessa ja jatkotutkimusten tarpeellisuutta. Rullainkonstruktion valinnassa empiirinen tutkimus antaa lähtökohdan erilaisten kantotelaratkaisujen arvioinnille.

JOHTOPÄÄTÖKSET

Taivekartonki on monimutkainen tuote. Se on rakenteeltaan monikerroksista ja kerrokset vaikuttavat loppukäyttöominaisuuksiin eri tavoin. Taivekartongin on oltava sekä tarpeeksi lujaa suojatakseen pakattavia tuotteita että pinnaltaan painokelpoista.

Pituusleikkaus on viimeisimpiä tehtaalla tapahtuvia prosessivaiheita ja se on yleisesti vähän tutkittu vaihe. Kartonki on valmista leikkurille tullessaan, joten sen ominaisuuksia ei voida kuin huonontaa leikkauksessa. Rullaus aiheuttaa muutoksia valmiiseen tuotteeseen, joten rullaustapahtuman tunteminen on tärkeää niin ongelmien ratkaisussa kuin kartongin materiaaliominaisuuksien suunnittelussa.

Rullaustapahtumaa voidaan kuvata erilaisten matemaattisten mallien avulla. Mallit ovat kuitenkin aina, kompleksisuudestaankin huolimatta, yksinkertaistettuja kuvauksia tapahtuvista fysikaalisista ilmiöistä rullaustapahtumassa. Yksinkertaistetussa simuloinnissa havaitaan perinteisesen kaksoisteloilla varustetun kantotelaleikkurin aiheuttamat rullan sisäisen jännitystilan syntymiseen vaikuttavat asiat.

Rullien tutkiminen tuotantotaloudellisesti järkevästi on hankalaa ilman varta vasten hankittuja tai valmistettuja aukirullaimia mittalaitteineen. Empiiriset tutkimukset osoittavat alustavasti rullien materiaaliominaisuuksien muutokset kahdella erilaisella leikkurityypillä. Muutokset ovat selkeästi havaittavia ja antavat rohkaisevat valmiudet tulevaisuuden laitevalintoja ja jatkotutkimuskohteita varten.

LÄHTEET

1. Papermaking Part 3, Finishing, Jokio M. (Ed.), Papermaking Science and Technology, Book 10, Fapet Oy, Helsinki, 2000
2. KnowPap 7.0 5/2005, 1997-2005, VTT Tuotteet ja Tuotanto, [Tietokanta]
3. Windrum-M pituusleikkurikirja, Hatakka A , Valmet Paper Machinery, 1995
4. Fault Diagnostics and Vibration Control Of Paper Winders, Virtanen T., 2006
5. The Mechanics of Winding, Roisum D. R., TAPPI Press, 1994
6. Formulas for Computing the Stresses in Center-Wound Rolls, Altmann H. C., Tappi Journal, vol. 51, no 4, 1968
7. Wound-Off Tension Measurement in Paper Rolls, Pfeiffer J. D., TAPPI Journal, vol. 60, no 3, 1977
8. Roark's Formulas for Stress and Strain, Young W. C., McGraw-Hill, 1989
9. Nonlinear Model for Wound Roll Stress, Hakiel Z., TAPPI Journal, vol. 70, no 5, 1987 b
10. Pulp and Paper Testing, Levlin J-E, (Ed.), Söderhjelm L. (Ed.), Papermaking Science and Technology, Book 17, Fapet Oy, Helsinki, 1999
11. Paper and Board Grades, Paulapuro H. (Ed.), Papermaking Science and Technology, Book 18, Fapet Oy, Helsinki, 2000

Lähtötiedot

$$r_{\min} := 150 \cdot \text{mm} \quad r_{\max} := 900 \cdot \text{mm} \quad q_{\min} := 1 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad q_{\max} := 200 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$w := 3300 \cdot \text{mm} \quad E_r := 5.2 \cdot \text{GPa} \quad E_t := 5.2 \cdot \text{GPa} \quad \nu_r := 0.01 \quad \frac{\text{kN}}{\text{mm}} := 1000 \cdot \text{N}$$

$$\nu_t := 0.01 \quad b := 0.07 \cdot \text{mm} \quad v := 2000 \cdot \frac{\text{m}}{\text{min}} \quad \rho_{\text{paperi}} := 670 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad \text{GPa} := 10^9 \cdot \text{Pa}$$

$$\rho_{\text{teräs}} := 7850 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$r_{\text{rullsyl}} := 0.5 \cdot (r_{\min} + r_{\max}) \quad r_{\text{rullsyl}} = 0.525 \text{ m}$$

$$m_t := \rho_{\text{teräs}} \cdot \left[r_{\min}^2 - (r_{\min} - 120 \cdot \text{mm})^2 \right] \cdot w$$

$$m_t = 559.548 \text{ kg}$$

$$d := 500 \text{ mm} \quad s := 30 \text{ mm}$$

Rullan täyttymiseen kuluva aika

$$T_{\max} := \frac{\pi \cdot w \cdot (r_{\max}^2 - r_{\min}^2)}{b \cdot w \cdot v}$$

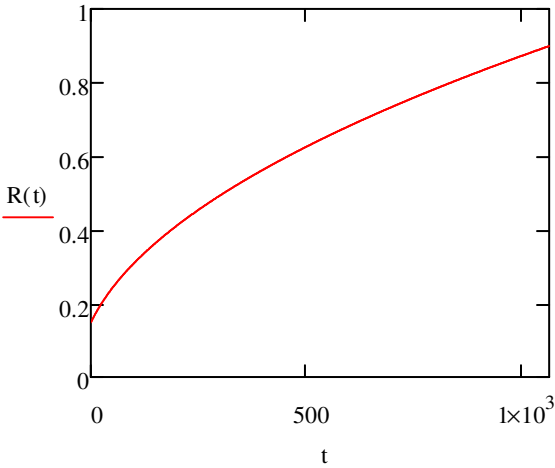
$$T_{\max} = 17.671 \cdot \text{min}$$

Rullan säteen muuttuminen parametrinen ajan t funktiona

$$\mu := b \cdot \rho_{\text{paperi}}$$

$$R(t) := \sqrt{\frac{\mu \cdot \rho_{\text{paperi}}^{-1} \cdot v \cdot t + \pi \cdot r_{\min}^2}{\pi}}$$

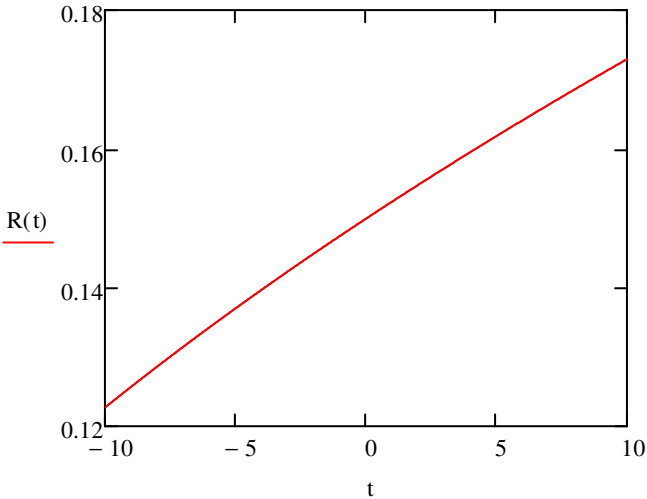
Kuvaajana



Taulukoituna

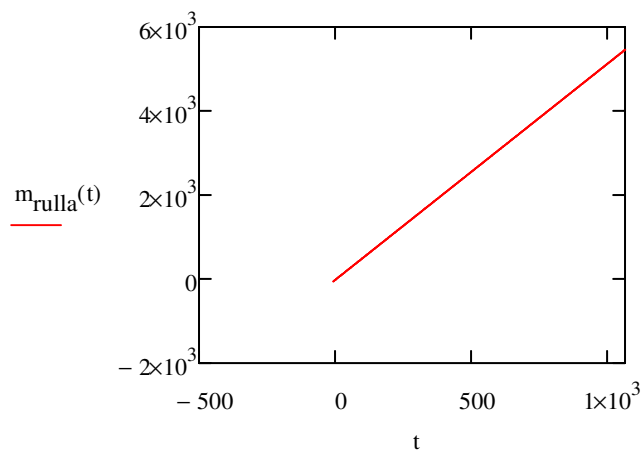
$$t := \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 30 \\ 45 \\ 48.96 \end{pmatrix} \cdot \text{min} \quad R(t) = \begin{pmatrix} 0.15 \\ 0.831 \\ 1.166 \\ 1.424 \\ 1.485 \end{pmatrix} \text{ m}$$

$t := 0\text{s}, 60\text{s}..T_{\text{max}}$



Rullan massa ajan funktiona

$m_{\text{rulla}}(t) := \rho_{\text{paperi}} \cdot b \cdot v \cdot w \cdot t$

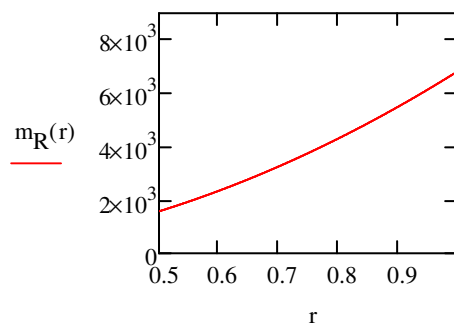


Taulukoituna

$$m_{\text{rulla}}(\textcolor{red}{t}) = \blacksquare$$

Rullan massa säteen funktiona

$$m_{\text{R}}(r) := \rho_{\text{paperi}} \cdot \pi \cdot w \cdot \left(r^2 - r_{\text{min}}^2 \right)$$



$$r := \begin{pmatrix} 700 \\ 850 \\ 1000 \\ 1150 \\ 1300 \end{pmatrix} \cdot \text{mm} \ast m_{\text{R}}(r) = \begin{pmatrix} 3.247 \times 10^3 \\ 4.862 \times 10^3 \\ 6.79 \times 10^3 \\ 9.03 \times 10^3 \\ 1.158 \times 10^4 \end{pmatrix} \text{ kg}$$

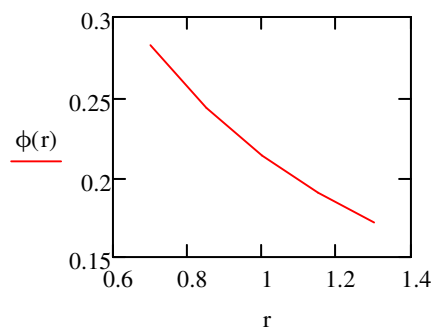
Vaadittu viivakuormitus säteen funktiona

$$G_{\text{säde}}(r) := m_{\text{t}} \cdot g + \rho_{\text{paperi}} \cdot \pi \cdot w \cdot \left(r^2 - r_{\text{min}}^2 \right) \cdot g$$

$$F_{\text{painotela}}(r) := \left(\frac{-121.18r^2}{m^2} - \frac{590.56r}{m} + 3350.7 \right) \cdot \text{N}$$

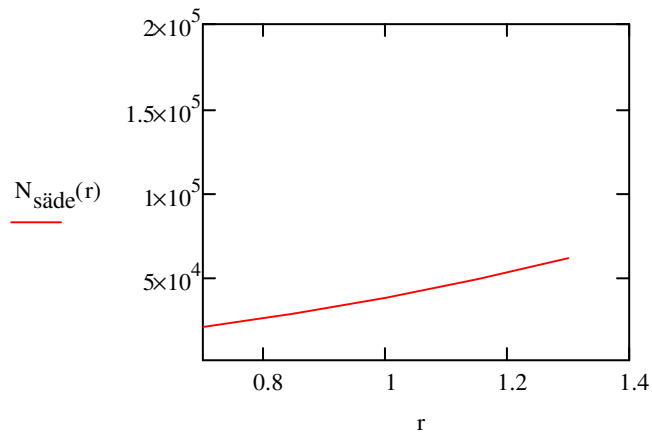
$$\phi(r) := \text{asin} \left(\frac{d + s}{2r + d} \right)$$

$$F_{\text{painotela}}(r) = \begin{pmatrix} 2.878 \times 10^3 \\ 2.761 \times 10^3 \\ 2.639 \times 10^3 \\ 2.511 \times 10^3 \\ 2.378 \times 10^3 \end{pmatrix} \text{ N}$$



$$\phi(r) = \begin{pmatrix} 16.197 \\ 13.94 \\ 12.24 \\ 10.911 \\ 9.844 \end{pmatrix} \cdot \text{deg}$$

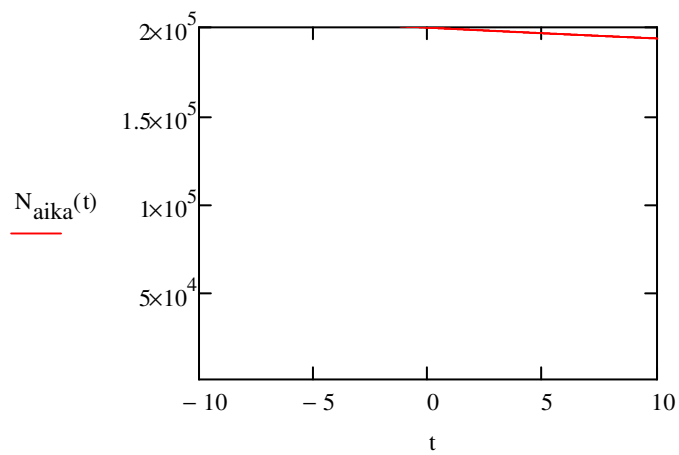
$$N_{\text{säde}}(r) := \frac{G_{\text{säde}}(r) + F_{\text{painotela}}(r)}{2 \cdot \cos(\phi(r))}$$



$$N_{\text{säde}}(r) = \begin{pmatrix} 20.936 \\ 28.814 \\ 38.224 \\ 49.165 \\ 61.633 \end{pmatrix} \text{ m} \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Vaadittu viivakuormitus ajan funktiona

$$N_{\text{aika}}(t) := q_{\text{max}} - \frac{q_{\text{max}} - q_{\text{min}}}{r_{\text{max}} - r_{\text{min}}} \cdot (R(t) - r_{\text{min}})$$



$$N_{\text{aika}}(\textcolor{red}{t}) = \textcolor{black}{\blacksquare} \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Paperin sisäänmenoännitys

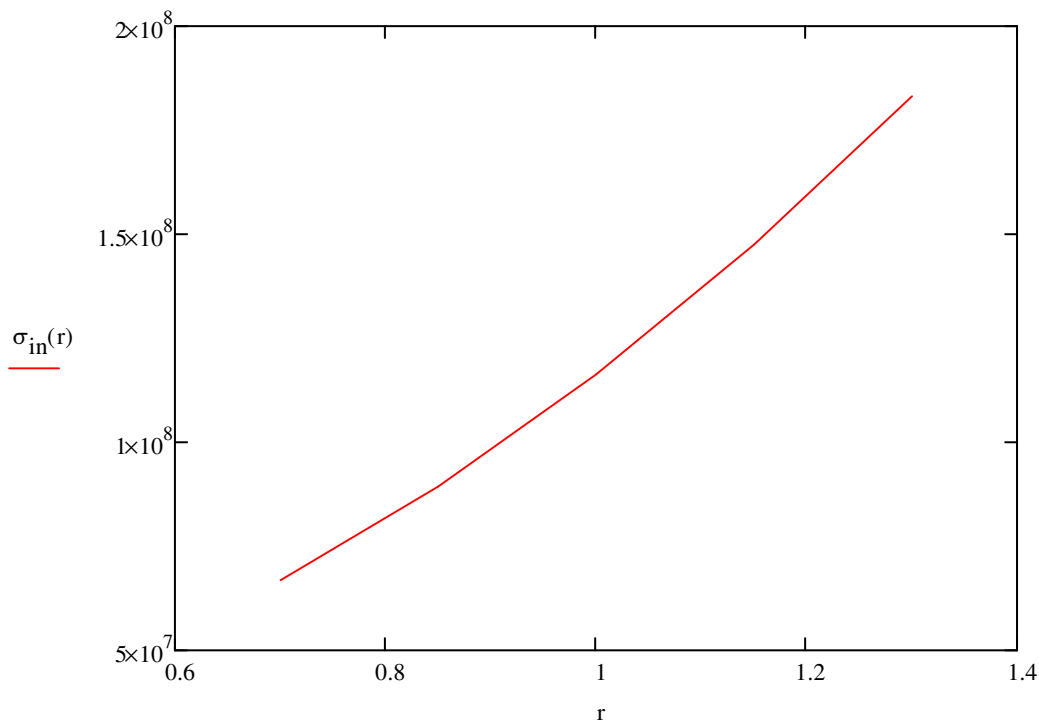
Paperin eri kerrosten välisen liukukitkan kerroin

$\mu_{ww} := 0.2$

Kiristys

$Q := 500 \cdot \frac{N}{m}$ $N_{säde}(1m) = 3.822 \times 10^4 \cdot N$

$$\sigma_{in}(r) := \frac{Q \cdot w + \frac{\mu \cdot N_{säde}(r) \cdot w}{m}}{w \cdot b}$$



Rullan jännityskomponentit täyden rullan säteen r funktiona

Apusuureet

$$\nu := \frac{1}{2} \cdot \left(\nu_t + \frac{E_t}{E_r} \cdot \nu_r \right)$$

$$\delta_{ww} := \frac{1}{2} \cdot \left(\nu_t - \frac{E_t}{E_r} \cdot \nu_r \right)$$

$$\gamma := \sqrt{\delta^2 + \frac{E_t}{E_r}}$$

$$\alpha := \frac{\gamma - \nu}{\gamma + \nu}$$

$$r_{\text{hattu}}(r) := \frac{r}{r_{\min}}$$

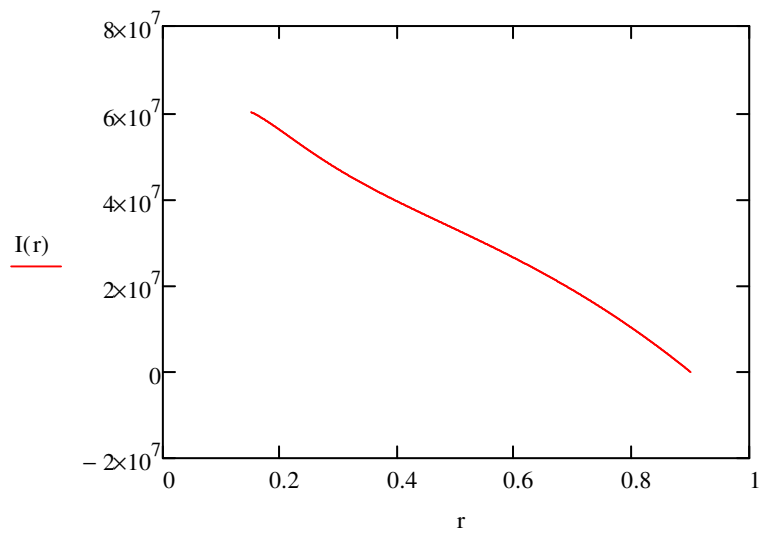
$$R_{\text{hattu}}(r) := \frac{r}{r_{\min}}$$

$$R_{\text{hattumax}} := \frac{r_{\max}}{r_{\min}}$$

Kumulatiivinen rullausintegraali

$$r := r_{\min}, r_{\min} + 1\text{mm} \dots r_{\max}$$

$$I(r) := \int_{r_{\text{hattu}}(r)}^{R_{\text{hattumax}}} \frac{R_{\text{hattu}}(r)^{1-\alpha}}{1 + \alpha \cdot R_{\text{hattu}}(r)^{-2 \cdot \gamma}} \cdot \frac{\sigma_{\text{in}}(r)}{R_{\text{hattu}}(r)} dR$$



Jännityskomponentit

$$\sigma_r(r) := - \left(\frac{1 + \alpha \cdot r_{\text{hattu}}(r)^{-2 \cdot \gamma}}{r_{\text{hattu}}(r)^{1-\alpha}} \right) \cdot I(r)$$

$$\sigma_t(r) := \sigma_{\text{in}}(r) - \frac{\gamma - \delta - \alpha \cdot (\gamma + \delta) \cdot r_{\text{hattu}}(r)^{-2 \cdot \gamma}}{r_{\text{hattu}}(r)^{1-\alpha}} \cdot I(r)$$

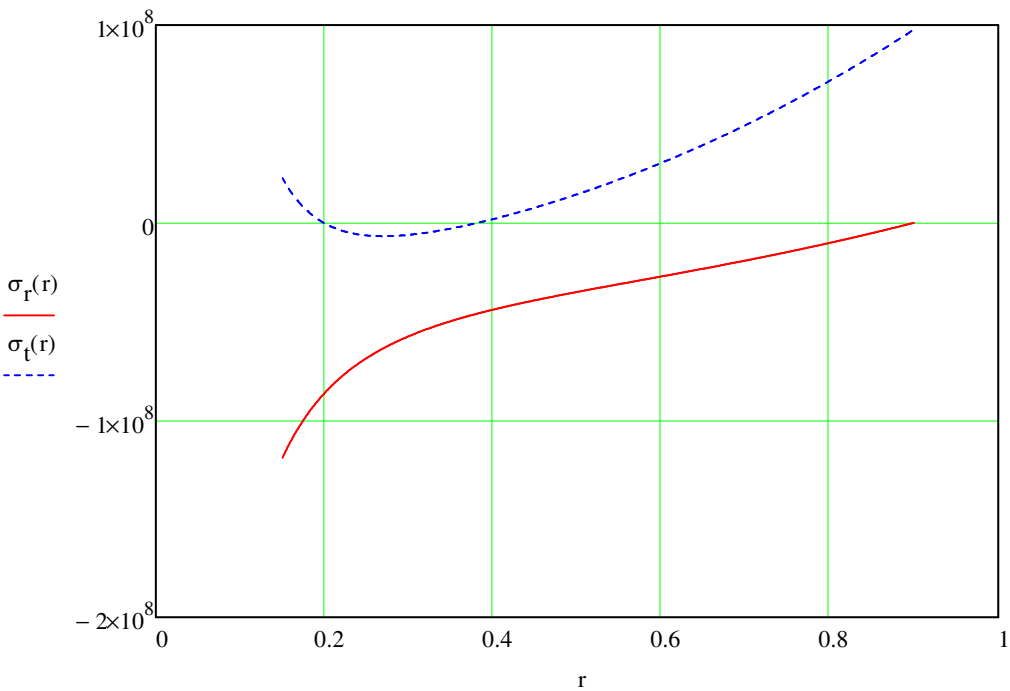
Jännityskomponentit taulukoituna

$$\sigma_r(r_{\min}) = -1.191 \times 10^8 \text{ Pa}$$

$$\sigma_r(r_{\max}) = 0 \text{ Pa}$$

$$\sigma_t(r_{\min}) = 2.263 \times 10^7 \text{ Pa}$$

$$\sigma_t(r_{\max}) = 9.795 \times 10^7 \text{ Pa}$$



$$\sigma_r := \begin{pmatrix} 8.047 \times 10^6 \\ 4.754 \times 10^6 \\ 2.571 \times 10^6 \\ 1.065 \times 10^6 \\ 0 \end{pmatrix} \blacksquare$$

$$\sigma_t := \begin{pmatrix} 9.307 \times 10^6 \\ 8.022 \times 10^6 \\ 7.669 \times 10^6 \\ 7.666 \times 10^6 \\ 7.755 \times 10^6 \end{pmatrix} \blacksquare$$

r =	
0.15	m
0.151	
0.152	
0.153	
0.154	
0.155	
0.156	
0.157	
0.158	
0.159	
0.16	
0.161	
0.162	
0.163	
0.164	
...	